ラグランジュ交叉と対蹠集合

Lagrangian intersections and antipodal sets

酒井高司（首都大学東京）
Takashi Sakai (Tokyo Metropolitan University)

Abstract: In this talk, we survey recent studies on the intersection of two Lagrangian submanifolds in a homogeneous Kähler manifold. We discuss the antipodal structure of the intersection of two real forms, which are totally geodesic Lagrangian submanifolds.

シンプレクティック多様体内の二つの Lagrange 部分多様体が横断的に交わるときの交叉については，Floer ホモロジーなどと関連して多くの研究がなされている．ある種の Lagrange 部分多様体 L に対しては，L とその Hamilton 変形 ϕL の交点数 $\#(L \cap \phi L)$ を L の $\mathbb{Z}_2$ 係数 Betti 数の和によって下からの評価する Arnold-Givenral 不等式が知られている．これに関連し，Y.-G. Oh は Hermite 対称空間 M 内の Lagrange 部分多様体 L に対して，タイト性の概念を導入した．これは，M の等長変換 g について L と gL が横断的に交わるとき，その交点数 $\#(L \cap gL)$ が L の $\mathbb{Z}_2$ 係数 Betti 数の和と一致する，すなわち Arnold-Givental 不等式の等号が成立する，という性質である．

Kähler 多様体において，対合的反正則等長変換の固定点集合の連結成分として与えられる全測地的 Lagrange 部分多様体を実形と呼ぶ．田中-田崎はコンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉を調べ，横断的な交叉は常に合同になり，対蹠集合という特殊な構造を持つことを示した．これにより特に，コンパクト型 Hermite 対称空間の実形は大域的タイトになることが分かる．ここで，対蹠集合とはコンパクト対称空間 M の部分集合 $\mathcal{A}$ で，各点 $x \in \mathcal{A}$ における点対称 s_x によって $\mathcal{A}$ のすべての点が固定されるものであり，Chen-長野によって導入された概念である．田中-田崎の結果から，実形の Lagrange 交叉においては，等長変換で動かしたときの交叉が本質的な役割を果たしていることが分かる．入江氏，田崎氏との共同研究において，コンパクト型 Hermite 対称空間内の実形の交叉の対蹠性を利用し，(合同とは限らない）二つの実形の組の Floer ホモロジーは実形として横断的に交わっているときの交叉によって生成されることを示した．さらに，これから二つの実形に対して一般化された Arnold-Givental 不等式を得ることができ，実形の Hamilton 体積最小性問題へ応用することができる．

講演の後半では，より一般的な設定として，複素旗多様体内の実旗多様体の交叉について解説する．連結コンパクト半単純 Lie 群 G の随伴表現の軌道は G 不変な Kähler 構造をもち，複素旗多様体と呼ばれる．複素旗多様体 M に対してはトーラス作用を用いて一般化された対蹠集合を定義することができる．M の極大対蹠集合は G の Weyl 群の軌道になり，特にすべての極大対蹠集合は互いに合同であることが示される．$(G, K_1), (G, K_2)$ をコンパクト型対称対とする．K_1 と K_2 の線形イソトロピー表現の軌道は共に複素旗多様体に実形として埋め込まれ，実旗多様体と呼ばれる．複素旗多様体内において二つの実旗多様体の交叉が横断的になるための条件は (G, K_1, K_2) から定まる対称三対を用いて記述することができる．さらに，離散的であるとき交叉は対称三対から定まるある Weyl 群の軌道となり，特に複素旗多様体の対蹠集合になる．これらの結果は入江博氏，井川治氏，奥田隆幸氏，田崎博之氏との共同研究による．

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc. 308 (1988), no. 1, 273–297.

[2] O. Ikawa, The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions, J. Math. Soc. Japan 63 (2011), no. 1, 79–136.

[3] O. Ikawa and M. S. Tanaka and H. Tasaki, The fixed point set of a holomorphic isometry, the intersection of two real forms in a Hermitian symmetric space of compact type and symmetric triads, Internat. J. Math. 26 (2015), no. 6, 1541005, 32 pp.

[4] H. Iriyeh, H. Ono and T. Sakai, Integral geometry and Hamiltonian volume minimizing property of a totally geodesic Lagrangian torus in $S^2 \times S^2$, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 79 (2003), no. 10, 167–170.

[5] H. Iriyeh, O. Ikawa, T. Okuda, T. Sakai and H. Tasaki, in preparation.

[6] H. Iriyeh and T. Sakai, Tight Lagrangian surfaces in $S^2 \times S^2$, Geom. Dedicata 145 (2010), 1–17.

[7] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan 65 (2013), no. 4, 1135–1151.

[8] Y.-G. Oh, Second variation and stabilities of minimal Lagrangian submanifolds in Kahler manifolds, Invent. Math. 101 (1990), no. 2, 501–519.

[9] Y.-G. Oh, Tight Lagrangian submanifolds in $\mathbb{C}P^n$, Math. Z. 207 (1991), no. 3, 409–416.

[10] Y.-G. Oh, Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations, Math. Z. 212 (1993), no. 2, 175–192.

[11] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan 64 (2012), no. 4, 1297–1332.

[12] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type II, J. Math. Soc. Japan 67 (2015), no. 1, 275–291.

[13] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Correction to: "The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type", J. Math. Soc. Japan 67 (2015), no. 3, 1161–1168.

[14] H. Tasaki, The intersection of two real forms in the complex hyperquadric, Tohoku Math. J. (2) 62 (2010), no. 3, 375–382.