有向実Grassmann多様体の対蹠集合

田崎博之

筑波大学

2013年4月26日

定義 (Chen-長野)

M : Riemann 対称空間

s_x : $x \in M$ における点対称

$S \subset M$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \ s_x(y) = y$

M の **2-number** $\#_2 M$

$\#_2 M = \max\{\#S \mid S$ は M の対蹠集合 $\}$

S : 大対蹠集合 $\Leftrightarrow \#S = \#_2 M$

田中-田　対称 $\boldsymbol{R}$ 空間において

(A) $\forall$対蹠集合 $\subset$ $\exists$大対蹠集合

(B) $\forall$二つの大対蹠集合：合同

$\boldsymbol{I_0(M)}$: $\boldsymbol{M}$ の等長変換全体の単位連結成分

$\boldsymbol{S_1, S_2 \subset M}$: 合同 $\Leftrightarrow \exists \boldsymbol{g \in I_0(M) S_2 = g S_1}$

一つの大対蹠集合がわかれば、すべての対蹠集合がわかる

Lie 環への標準埋め込みが重要な役割を演じる

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

$\boldsymbol{G_k}(\mathbb{K}^{\boldsymbol{n}})$: **Grassmann** 多様体

$\boldsymbol{G_k}(\mathbb{K}^{\boldsymbol{n}})$ は対称 $\boldsymbol{R}$ 空間になる

$\mathbf{Inc}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{n})$: $\{1, \ldots, \boldsymbol{k}\}$ から $\{1, \ldots, \boldsymbol{n}\}$ への単調増加写像全体

$\{\boldsymbol{v_i}\}$: $\mathbb{K}^{\boldsymbol{n}}$ の $\mathbb{K}$ 正規直交基底

$\Rightarrow \{\langle \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\alpha}(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{k})} \rangle_{\mathbb{K}} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Inc}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{n})\}$

: $\boldsymbol{G_k}(\mathbb{K}^{\boldsymbol{n}})$ の大対蹠集合

$$\#_2 \boldsymbol{G_k}(\mathbb{K}^{\boldsymbol{n}}) = \#\mathbf{Inc}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{n}) = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$$

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$: 有向実 Grassmann 多様体

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n) \subset \bigwedge^k \mathbb{R}^n$: 等長的

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n) \ni \tilde{V}$: 有向部分空間

V : $\tilde{V}$ の元の部分空間

$r_V = 1_V - 1_{V^\perp}$: V に関する鏡映

$\wedge^k r_V : \bigwedge^k \mathbb{R}^n \to \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ 線形等長的

$\wedge^k r_V(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = r_V(v_1) \wedge \cdots \wedge r_V(v_k)$

$s_V = \wedge^k r_V|_{\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)}$: $\tilde{V}$ における点対称

二重被覆

$p : \tilde{\boldsymbol{G}}_k(\mathbb{R}^n) \to \boldsymbol{G}_k(\mathbb{R}^n); \tilde{\boldsymbol{V}} \mapsto \boldsymbol{V}$

$\tilde{\boldsymbol{G}}_k(\mathbb{R}^n) \supset \boldsymbol{S}$：対蹠集合

$\Rightarrow \boldsymbol{G}_k(\mathbb{R}^n) \supset p(\boldsymbol{S})$：対蹠集合

$\Rightarrow \exists\{v_i\}$：$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底

$p(\boldsymbol{S}) \subset \{\langle v_{\alpha(1)}, \ldots, v_{\alpha(k)}\rangle_{\mathbb{R}} \mid \alpha \in \mathbf{Inc}_k(n)\}$

以上より

$\boldsymbol{S} \subset \{\pm v_{\alpha(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha(k)} \mid \alpha \in \mathbf{Inc}_k(n)\}$

以上より次の補題を得る

補題　$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合は次の形

$\exists v = \{v_i\}$: $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底

$\exists A \subset \mathrm{Inc}_k(n)$

$\{\pm v_{\alpha(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha(k)} \mid \alpha \in A\}$

$\mathcal{A}_v(A)$: 上記集合

$P_k(n) := \{X \subset \{1, \ldots, n\} \mid \# X = k\}$

$\mathrm{Inc}_k(n) \to P_k(n); \alpha \mapsto \{\alpha(i)\}$ 同一視

$\vec{v}_\alpha := v_{\alpha(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha(k)}$ における点対称

$s_{\vec{v}_\alpha}(\vec{v}_\beta) = (-1)^{\#(\beta - \alpha)} \vec{v}_\beta \ (\alpha, \beta \in P_k(n))$

補題　$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{P_k(n)}$

$\boldsymbol{\mathcal{A}_v(A)}$: $\boldsymbol{\tilde{G}_k}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ の対蹠集合

$\Leftrightarrow \#(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha})$: 偶数 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{A})$

定義　$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{P_k(n)}$: 対蹠的

$\Leftrightarrow \#(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha})$: 偶数 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{A})$

定理　$\boldsymbol{\tilde{G}_k}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ の極大対蹠集合は次の形

$\exists \boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{P_k(n)}$ の極大対蹠的部分集合

$\exists \boldsymbol{v}$: $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ の正規直交基底　$\boldsymbol{\mathcal{A}_v(A)}$

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合

$\leftrightarrow$ $P_k(n)$ の極大対蹠的部分集合 $\cdots (*)$

$(*)$ を求めるための準備

$P_k(n)$ に辞書式順序を導入

$\{1, \ldots, k\}$ は最小元

$\mathrm{Sym}(n)$: n 次対称群、$A \subset P_k(n)$

$S(A) = \{g \in \mathrm{Sym}(n) \mid g(A) = A\}$

$\boldsymbol{P_k(n)}$ の極大対蹠的部分集合の求め方

$\boldsymbol{A_1 = \{\{1, \ldots, k\}\}}$

$\boldsymbol{\{\alpha \in P_k(n) - A_1 \mid A_1 \cup \{\alpha\}}$: 対蹠的$\boldsymbol{\}}$

の $\boldsymbol{S(A_1)}$ 軌道を分類、

各軌道の最小元を $\boldsymbol{A_1}$ に追加し、それぞ

れ $\boldsymbol{A_{2,1}, A_{2,2}, \ldots}$

この操作を繰り返す

一般の場合　$\boldsymbol{A_{i,j}}$ に対して

$(**)\quad \{\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{P_k(n)} - \boldsymbol{A_{i,j}} \mid$

$$\boldsymbol{A_{i,j}} \cup \{\boldsymbol{\alpha}\} : \text{対蹠的}\}$$

の $\boldsymbol{S(A_{i,j})}$ 軌道を分類、

各軌道の最小元を $\boldsymbol{A_{i,j}}$ に追加し、それぞれ $\boldsymbol{A_{i+1,1}}, \boldsymbol{A_{i+1,2}}, \cdots$

この操作を有限回繰り返すと $(**)$ は空集合になり、$\boldsymbol{A_{i,j}}$ は極大対蹠的部分集合

$\boldsymbol{k = 1}$、$\boldsymbol{A_1 = \{\{1\}\}}$ は極大対蹠的部分集合

$k=2$の場合

$A_1 = \{\{1,2\}\}$

$\{\alpha \in P_2(n) - A_1 \mid A_1 \cup \{\alpha\}$: 対蹠的 $\}$

$= P_2(\{3,\ldots,n\})$

の $S(A_1)$ 軌道は $P_2(\{3,\ldots,n\})$ のみ、最小元

は $\{3,4\}$、A_1 に追加し $A_2 = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$

同様の操作を続け次の極大対蹠的部分集合に到

達する。

$$A_{[\frac{n}{2}]} = \{\{1,2\},\ldots,\{2[\tfrac{n}{2}]-1, 2[\tfrac{n}{2}]\}\}$$

対応する $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^n)$ の大対蹠集合

$$\{\pm v_1 \wedge v_2, \ldots, \pm v_{2[\frac{n}{2}]-1} \wedge v_{2[\frac{n}{2}]}\}$$

$\tilde{G}_2(\mathbb{R}^n)$ はコンパクト型 Hermite 対称空間

この観点からでも上記大対蹠集合を得られる

$n = 2l$ の場合 $\mathbb{R}^{2l} = \mathbb{C}^l$

$\sum_{\alpha \in A_l} \vec{v}_\alpha^* : \mathbb{C}^l$ の Kähler 形式

$U(l)$ 不変 2 次交代形式

$\tilde{G}_1(\mathbb{R}^n), \tilde{G}_2(\mathbb{R}^n)$ は対称 R 空間だが、
$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ $(2 < k \leq n)$ は対称 R 空間ではなく、合同ではない極大対蹠集合が複数ある場合もある。

$k = 3$の場合

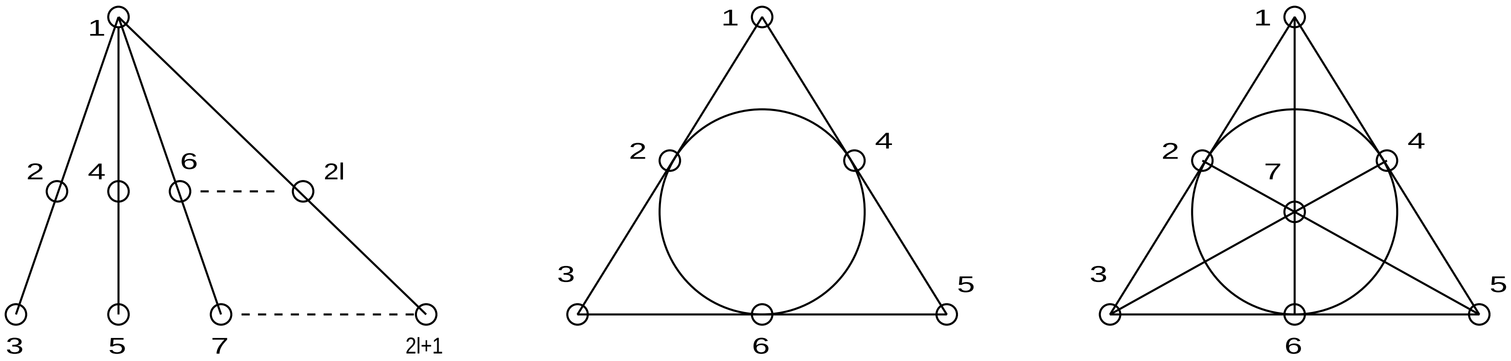


Figure 1: $A(3, 2l+1)$, $B(3, 6)$ and $B(3, 7)$

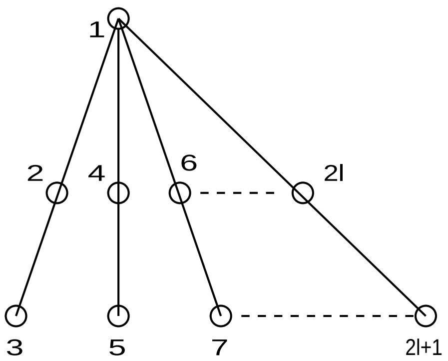
$$A(3,5) \subset B(3,6) \subset B(3,7),$$
$$A(3,5) \subset A(3,7) \subset B(3,7).$$

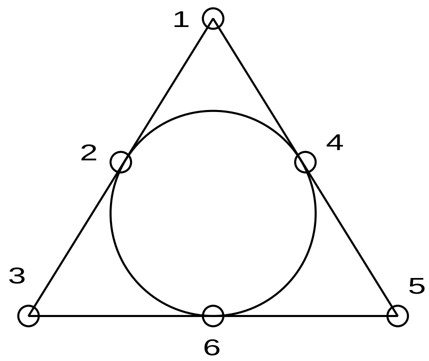
定理　$l = [(n-1)/2]$

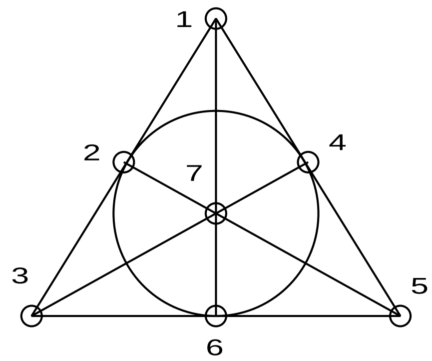
$P_3(n)$ の極大対蹠的部分集合：

n	$3, 4$	5	6	$7, 8$
	$A(3,3)$	$A(3,5)$	$B(3,6)$	$B(3,7)$

n	9 以上
	$A(3, 2l+1), B(3,7)$







系

$\boldsymbol{n}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{7, \ldots, 16}$	$\mathbf{17}$ 以上
$\#_2 \tilde{\boldsymbol{G}}_3(\mathbb{R}^n)$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{8}$	$\mathbf{14}$	$\mathbf{2[(\boldsymbol{n}-1)/2]}$

$$\sum_{\alpha \in B(3,6)} \epsilon_\alpha \vec{v}_\alpha^* \qquad (\epsilon_\alpha = \pm 1)$$

: $\mathbb{C}^3$ 上の特殊 Lagrange 3 次交代形式

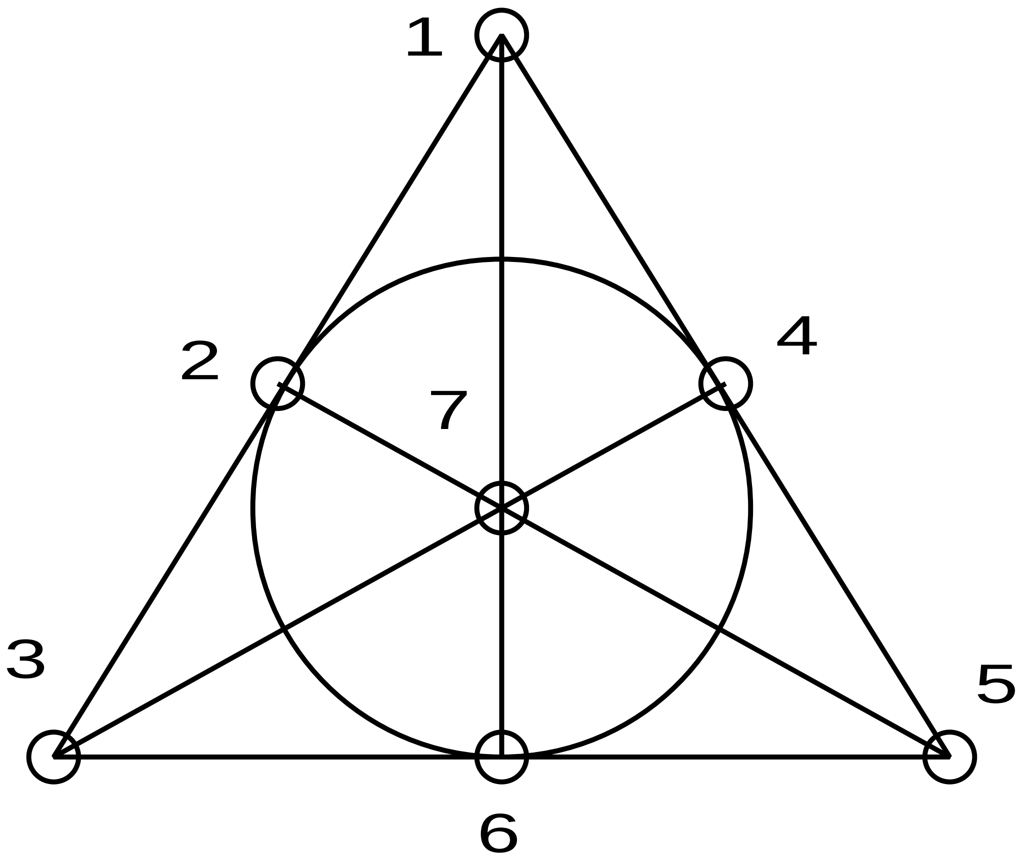
: $SU(3)$ 不変

$$\sum_{\alpha \in B(3,7)} \vec{v}_\alpha^*$$

: $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ 上の G_2 不変 3 次交代形式

: Harvey-Lawson が発見

G_2 は八元数体 $\mathbb{O}$ の自己同型群であり、1 を固定するので $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ に働く



$B(3,7)$ は、二元体 $F_2 = \{0,1\}$ 上の射影平面の射影直線全体と同じ

$\boldsymbol{k = 4}$の場合

$$\boldsymbol{A(4, 2l) = \{\alpha \cup \beta \in P_4(2l) \mid \alpha, \beta}$$
$$\boldsymbol{\in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{2l-1, 2l\}\}\},}$$
$$\boldsymbol{B(4, 7) = \{\alpha^c \mid \alpha \in B(3, 7)\},}$$
$$\boldsymbol{B(4, 8) = B(4, 7) \cup B(3, 7) \times \{\{8\}\}.}$$

これらは$\boldsymbol{P_4(n)}$の対蹠的部分集合。

ただし

$$\boldsymbol{B(3, 7) \times \{\{8\}\} = \{\alpha \cup \{8\} \mid \alpha \in B(3, 7)\}}$$

定理　$\boldsymbol{A(4,2l)\ (l \geq 2, \neq 4),\ B(4,7),}$ $\boldsymbol{B(4,8)}$ と合同なもののしかるべき合併で $\boldsymbol{P_4(n)}$ の極大対蹠的部分集合はつきる。

系

$\boldsymbol{n}$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{7}$	$\mathbf{8\ldots,11}$	$\mathbf{12}$ 以上
$\#_2\tilde{\boldsymbol{G}}_4(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{14}$	$\mathbf{28}$	$[\boldsymbol{n}/\mathbf{2}]([\boldsymbol{n}/\mathbf{2}]-\mathbf{1})$

$$\sum_{\alpha \in A(4,2l)} \vec{v}_\alpha^* = \frac{1}{2}\omega^2$$

ここで ω は $\mathbb{C}^l$ 上の Kähler 形式

$$\sum_{\alpha \in B(4,8)} \epsilon_\alpha \vec{v}_\alpha^*$$

: $\mathbb{H}^2$ 上の $Sp(2)Sp(1)$ 不変 4 次交代形式

一般の $\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{k = 2k'}$ のとき

$$\boldsymbol{A(k, 2l) = \{\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_{k'} \in P_k(2l) \mid \alpha_i \in \{\{1, 2\}, \ldots, \{2l-1, 2l\}\}\}}$$

$\boldsymbol{l \geq 3k' - 1 \Rightarrow}$

$\boldsymbol{A(k, 2l) : P_k(2l), P_k(2l+1)}$ の極大対蹠的部分集合

$\boldsymbol{A \subset P_k(2k+1)}$ に対して

$\boldsymbol{A^c \subset P_{k+1}(2k+1)}$

$\boldsymbol{A \times \{\{2k+2\}\} \subset P_{k+1}(2k+2)}$

$$\boldsymbol{TD(A) = A^c \cup A \times \{\{2k+2\}\}}$$

例：$\boldsymbol{TD(B(3,7)) = B(4,8)}$

$\boldsymbol{k}$：奇数

$\boldsymbol{A \subset P_k(2k+1)}$：対蹠的

$\boldsymbol{\Rightarrow TD(A) \subset P_{k+1}(2k+2)}$：対蹠的

$\boldsymbol{A \subset P_k(2k+1)}$：極大対蹠的

$\boldsymbol{\Rightarrow TD(A) \subset P_{k+1}(2k+2)}$

：極大対蹠的