複素旗多様体内の二つの実形の交叉

酒井 高司（首都大学東京理工学研究科）*

1 導入

Kähler 多様体において対合的反正則等長変換による固定点集合の一つの連結成分として与えられる部分多様体を実形と呼ぶ．定義から，実形は全測地的な Lagrange 部分多様体になる．田崎 [12] および田中-田崎 [9, 10, 11] はコンパクト型 Hermite 対称空間 M の二つの実形 L_1, L_2 の交叉の構造を調べ，離散的に交わるならば，その交叉 $L_1 \cap L_2$ は L_1 および L_2 の対蹠集合になることを示した．さらに，L_1 と L_2 が互いに合同である場合，交叉は L_1 および L_2 の大対蹠集合になる．ここで，対蹠集合とはコンパクト対称空間 M の部分集合 $\mathcal{A}$ で，各点 $x \in \mathcal{A}$ における点対称 s_x によって $\mathcal{A}$ のすべての点が固定されるものをいう．対蹠集合のとりうる最大基数を M の 2-number と呼び，$\#_2 M$ と表す．特に，基数が 2-number を実現するような M の対蹠集合を大対蹠集合と呼ぶ．これらの概念は Chen-長野 [2] によって導入された．

連結コンパクト半単純 Lie 群 G の随伴表現の軌道は G 不変な Kähler 構造をもち，複素旗多様体と呼ばれる．複素旗多様体 M に対して，ある整数 $k_0 \geq 2$ が存在し，$k \geq k_0$ なる任意の整数 k について M に k 対称空間の構造を定めることができる．この k 対称空間としての点対称により定義される M の極大対蹠集合は G の Weyl 群の軌道になり，特にすべての極大対蹠集合は互いに合同であることが示される（定理 2.2）．(G, K) をコンパクト型対称対とする．対称空間 G/K の線形イソトロピー表現の軌道は複素旗多様体に実形として埋め込まれ，実旗多様体と呼ばれる．3 節において，複素旗多様体 M 内において合同な二つの実形 L_1 と L_2 の交叉 $L_1 \cap L_2$ が離散的になるための条件を与え，離散的であるとき交叉は (G, K) の Weyl 群の軌道となり，M の対蹠集合になることを示す（定理 3.2）．

本稿の内容は入江博氏（東京電機大学），田崎博之氏（筑波大学）との共同研究による．さらに最近，井川治氏（京都工芸繊維大学），奥田隆幸氏（広島大学）を加えた共同研究で，二つの実形が合同とは限らない場合に結果を拡張できた．

2 複素旗多様体の対蹠集合

G を連結コンパクト半単純 Lie 群とする．G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ と表し，$\mathfrak{g}$ 上に $\mathrm{Ad}(G)$ 不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を与える．0 でない $Z \in \mathfrak{g}$ をとり，Z を起点とする G の随伴表現の軌道を $M := \mathrm{Ad}(G)Z \subset \mathfrak{g}$ と表す．Z を固定する G のイソトロピー部分群を G_Z と表すと，M は G/G_Z と微分同型になる．このとき，G_Z の Lie 環は $\mathfrak{g}_Z = \{X \in \mathfrak{g} \mid [Z, X] = 0\}$ となる．また，G の複素化 $G^{\mathbb{C}}$ の岩澤分解を用いると，M には $G^{\mathbb{C}}$ が推移的に作用し，そのイソトロピー部分群 $P^{\mathbb{C}}$ は $G^{\mathbb{C}}$ の放物型複素 Lie 部分群になる．したがって，$M \cong G^{\mathbb{C}}/P^{\mathbb{C}}$ には $G^{\mathbb{C}}$ 不変な複素構造が定まる．さらに，$\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ から誘導される Riemann 計量により M は G 不変な Kähler 多様体になり，複素旗多様体と呼ばれる．

---

*sakai-t@tmu.ac.jp

本研究は JSPS 科研費 基盤研究 (C) No.26400073 の助成を受けたものである．

Z を含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ をとる．$\mathfrak{t}$ の複素化 $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分環になる．$\alpha \in \mathfrak{t}$ に対し

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, H\rangle X \ (H \in \mathfrak{t})\}$$

と定め，$\Delta := \{\alpha \in \mathfrak{t} - \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$ によって $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ に関する $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ のルート系を定める．このとき，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ のルート空間分解

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

が得られ，$\mathfrak{g}_Z$ は次のようになる．

$$\mathfrak{g}_Z = \mathfrak{t} + \mathfrak{g} \cap \sum_{\substack{\alpha \in \Delta \\ \alpha(H)=0}} \mathfrak{g}_\alpha.$$

$\mathfrak{g}$ を単純イデアルの直和に分解すると，ルート系 Δ は $\Delta = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_r$ と既約ルート系の非交和に分解される．各 Δ_i $(1 \leq i \leq r)$ に対して，$\alpha_{i,j}(Z) \geq 0$ をみたす基本系 $\alpha_{i,j}$ $(1 \leq j \leq p_i)$ をとる．これらを合わせた $\{\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq p_i\}$ は Δ の基本系になる．ここで，$\alpha_{i,j}$ の順序を適当に入れ換えることにより $\{\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i \leq r, q_i+1 \leq j \leq p_i\}$ が $\{\alpha \in \Delta \mid \alpha(H) = 0\}$ の基本系であるとしてよい．各 Δ_i の最高ルートを δ_i とし，

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{p_i} m_{i,j}\alpha_{i,j}$$

と表す．このとき係数となる自然数 $m_{i,j}$ により

$$k_0 := \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{q_i} m_{i,j} \right\}$$

と自然数 $k_0 \geq 2$ を定める．Δ の基本系 $\{\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq p_i\}$ に対して，$\langle \alpha_{i,j}, H_{k,l}\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}$ をみたす $\mathfrak{t}$ の基底を $\{H_{i,j} \mid 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq p_i\}$ とし，

$$Y := \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{q_i} H_{i,j} \in \mathfrak{t}$$

と定める．さらに，自然数 $k \geq k_0$ に対して

$$g_k := \exp\left(\frac{2\pi}{k} Y\right) \in \exp \mathfrak{t} \subset G_Z$$

と定め，M の微分同型写像 θ_k を

$$\theta_k(x) = \mathrm{Ad}(g_k)x \quad (x \in M)$$

と定める．θ_k は $(\theta_k)^k = \mathrm{id}_M$ をみたし，$Z \in M$ を孤立固定点にもつ．ゆえに，θ_k は Z における M の位数 k の点対称となり，M に k 対称空間の構造を定める．特に，$k_0 = 2$ のとき M はコンパクト型 Hermite 対称空間になる．ここで，Y の定義より $[Y, \mathfrak{g}_Z] = \{0\}$ となり，$\mathfrak{g}$ の線形変換 $\mathrm{Ad}(g_k)$ の固有値 1 の固有空間は $\mathfrak{g}_Z$ と一致することが示される．よって，θ_k による M の固定点集合 $F(\theta_k, M)$ は $M \cap \mathfrak{g}_Z$ と一致する．したがって，$x \in M$ について，$\theta_k(x) = x$ となるための必要十分条件は $[Z, x] = 0$ である．同様に，$x \in M$ における位数 k の点対称を s_x と表すと，次の定理を得る．

定理 2.1 ([4]). 各点 $x \in M$ において s_x による固定点集合は

$$F(s_x, M) = \{y \in M \mid [x, y] = 0\}$$

となる．特に，$F(s_x, M)$ は $k \geq k_0$ に依らない．

複素旗多様体 M の部分集合 $\mathcal{A}$ が，任意の $x, y \in \mathcal{A}$ について $s_x(y) = y$ をみたすとき，$\mathcal{A}$ を対蹠集合と呼ぶ．定理 2.1 より，M の対蹠集合 $\mathcal{A}$ によって生成される $\mathfrak{g}$ の部分空間は可換部分環になり，それを含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}'$ が存在する．よって，$\mathcal{A} \subset M \cap \mathfrak{t}'$ となる．以上の議論により次の定理を得る．

定理 2.2 ([4]). 複素旗多様体 M の極大対蹠集合は $\mathfrak{g}$ のある極大可換部分環 $\mathfrak{t}'$ との交叉 $M \cap \mathfrak{t}'$ になる．これは $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{t}'$ に関する Weyl 群の軌道であり，したがって M のすべての極大対蹠集合は G の随伴作用によって互いに合同になる．

3　複素旗多様体内の実形の交叉

G を連結コンパクト半単純 Lie 群とし，(G, K) をコンパクト型対称対とする．G, K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ と表すと，$\mathfrak{g}$ は対称対 (G, K) の対合により

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

と標準分解される．0 でない $Z \in \mathfrak{p}$ について，Z を通る $\mathrm{Ad}(K)$ 軌道 $L := \mathrm{Ad}(K)Z$ を実旗多様体と呼ぶ．Z を固定する K のイソトロピー部分群を K_Z と表すと，L は K/K_Z と微分同型になる．K は G の Lie 部分群であるから，L は複素旗多様体 $M = \mathrm{Ad}(G)Z$ に部分多様体として含まれる．

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$$

とおくと，$\mathfrak{g}'$ は $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の実形になる．$\mathfrak{g}'$ を Lie 環とする $G^{\mathbb{C}}$ の解析的部分群を G' とすると，(G', K) は非コンパクト型 Riemann 対称対になる．G' の岩澤分解より，L には G' が推移的に作用する．G' に関する $G^{\mathbb{C}}$ の複素共役を σ と表すと，$P^{\mathbb{C}}$ は σ で不変であり，したがって σ は $M \cong G^{\mathbb{C}}/P^{\mathbb{C}}$ に対合的反正則等長変換 $\tilde{\sigma}$ を誘導する．σ による $G^{\mathbb{C}}$ の固定点集合の単位連結成分が G' であることから，$\tilde{\sigma}$ による M の固定点集合の原点を含む連結成分は L と一致する．よって，L は M の実形となる．

$g \in G$ に対して，M 内において実形 L と合同な実形 $\mathrm{Ad}(g)L$ との交叉 $L \cap \mathrm{Ad}(g)L$ を考える．Z を含む $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとる．$A := \exp \mathfrak{a}$ とおくと，A はトーラスになり，$G = KAK$ が成り立つ．これより $g = g_1 a g_2$ $(g_1, g_2 \in K,\ a \in A)$ と表すことができる．L は $\mathrm{Ad}(K)$ 軌道であるから，$\mathrm{Ad}(K)$ 不変であり，

$$L \cap \mathrm{Ad}(g)L = L \cap \mathrm{Ad}(g_1 a g_2)L = \mathrm{Ad}(g_1)(L \cap \mathrm{Ad}(a)L)$$

となる．ゆえに，M の合同な部分集合を同一視する立場では，$L \cap \mathrm{Ad}(g)L$ を調べることは，$L \cap \mathrm{Ad}(a)L$ を調べることに帰着する．

$\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ をとる．$\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ に関する $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ のルート系を Δ とする．一方，$\gamma \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\tilde{\mathfrak{g}}_\gamma := \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \gamma, H \rangle X \ (H \in \mathfrak{a})\}$$

と定め，$R := \{\gamma \in \mathfrak{a} - \{0\} \mid \tilde{\mathfrak{g}}_\gamma \neq \{0\}\}$ によって制限ルート系を定める．$\mathfrak{t}$ から $\mathfrak{a}$ への直交射影を $H \mapsto \bar{H}$ で表すと

$$R = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \Delta,\, \bar{\alpha} \neq 0\}$$

が成り立つ．$\mathfrak{a}$ に辞書式順序を定め，それを延長して $\mathfrak{t}$ の辞書式順序を定める．このとき，Δ と R の正のルートの集合をそれぞれ Δ_+, R_+ と表す．$\gamma \in R_+$ に対して

$$\mathfrak{k}_\gamma = \mathfrak{k} \cap (\tilde{\mathfrak{g}}_\gamma + \tilde{\mathfrak{g}}_{-\gamma}), \quad \mathfrak{p}_\gamma = \mathfrak{p} \cap (\tilde{\mathfrak{g}}_\gamma + \tilde{\mathfrak{g}}_{-\gamma})$$

とおき，

$$\mathfrak{k}_0 = \{X \in \mathfrak{k} \mid [H, X] = 0\,(H \in \mathfrak{a})\}$$

とおく．このとき次の補題が成り立つ．

補題 3.1 ([3], [8])**.** 次は直交直和分解である．

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 + \sum_{\gamma \in R_+} \mathfrak{k}_\gamma, \qquad \mathfrak{p} = \mathfrak{a} + \sum_{\gamma \in R_+} \mathfrak{p}_\gamma.$$

$\bar{\alpha} \neq 0$ を満たす各 $\alpha \in \Delta_+$ に対して以下の条件を満たす $S_\alpha \in \mathfrak{k}$ と $T_\alpha \in \mathfrak{p}$ が存在する．

(1) 各 $\gamma \in R_+$ に対して $\{S_\alpha \mid \alpha \in \Delta_+, \bar{\alpha} = \gamma\}$ と $\{T_\alpha \mid \alpha \in \Delta_+, \bar{\alpha} = \gamma\}$ はそれぞれ $\mathfrak{k}_\gamma$ と $\mathfrak{p}_\gamma$ の正規直交基底である．

(2) $\bar{\alpha} = \gamma \in R_+$ を満たす各 $\alpha \in \Delta_+$ と各 $H \in \mathfrak{a}$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&[H, S_\alpha] = \langle \gamma, H \rangle T_\alpha, \quad [H, T_\alpha] = -\langle \gamma, H \rangle S_\alpha, \quad [S_\alpha, T_\alpha] = \gamma, \\
&\mathrm{Ad}(\exp H) S_\alpha = \cos\langle \gamma, H \rangle S_\alpha + \sin\langle \gamma, H \rangle T_\alpha, \\
&\mathrm{Ad}(\exp H) T_\alpha = -\sin\langle \gamma, H \rangle S_\alpha + \cos\langle \gamma, H \rangle T_\alpha.
\end{aligned}$$

$a \in A$ を $a = \exp H$ $(H \in \mathfrak{a})$ と表す．補題 3.1 より，$\mathrm{Ad}(a)$ を $\mathfrak{p}$ 内の各制限ルート空間に作用させると

$$\mathfrak{p} \cap \mathrm{Ad}(a)\mathfrak{p} = \mathfrak{a} + \sum_{\substack{\lambda \in R_+ \\ \langle \lambda, H \rangle \in \pi\mathbb{Z}}} \mathfrak{p}_\lambda \tag{3.1}$$

が成り立つ．これより次の定理を得る．

定理 3.2. 上記設定のもとで，任意の $\lambda \in R$ について $\langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}$ が成り立つならば，L と $\mathrm{Ad}(a)L$ の交叉 $L \cap \mathrm{Ad}(a)L$ は離散的になる．このとき，対称対 (G, K) の $\mathfrak{a}$ に関する Weyl 群を $W(G, K)$ と表すと

$$L \cap \mathrm{Ad}(a)L = M \cap \mathfrak{a} = W(G, K)Z$$

が成り立つ．さらに，G の $\mathfrak{t}$ に関する Weyl 群を $W(G)$ とおくと，$W(G)Z \supset W(G, K)Z$ となり，$W(G, K)Z$ は M の対蹠集合である．

(G, K) が既約コンパクト型対称対である場合，逆に交叉 $L \cap \mathrm{Ad}(a)L$ が離散的になるのは，任意の $\lambda \in R$ について $\langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}$ が成り立つときに限られる．

証明. 任意の $\lambda \in R$ について $\langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}$ が成り立つと仮定すると，(3.1) より

$$\mathfrak{p} \cap \mathrm{Ad}(a)\mathfrak{p} = \mathfrak{a}$$

となる．したがって，$L = M \cap \mathfrak{p}$ より，

$$L \cap \mathrm{Ad}(a)L = (M \cap \mathfrak{p}) \cap \mathrm{Ad}(a)(M \cap \mathfrak{p}) = M \cap (\mathfrak{p} \cap \mathrm{Ad}(a)\mathfrak{p}) = M \cap \mathfrak{a}$$

を得る．ここで，$M \cap \mathfrak{a} \subset M \cap \mathfrak{t}$ であり，$M \cap \mathfrak{t}$ は M の極大対蹠集合であるから，$L \cap \mathrm{Ad}(a)L$ も M の対蹠集合である．さらに Weyl 群の性質より

$$M \cap \mathfrak{a} = L \cap \mathfrak{a} = W(G, K)Z$$

が成り立つ．

次に，ある $\lambda \in R_+$ に対して $\langle \lambda, H \rangle \in \pi\mathbb{Z}$ が成り立つとする．(G, K) は既約コンパクト対称対であるとすると，$W(G, K)Z$ は $\mathfrak{a}$ を張るので，$\langle \lambda, X \rangle \neq 0$ となる $X \in W(G, K)Z$ が存在する．このとき，補題 3.1 より，$\bar{\alpha} = \lambda$ を満たす $\alpha \in \Delta$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathrm{Ad}(\exp tS_\alpha)X = X + \frac{\langle \lambda, X \rangle}{|\lambda|^2}(\cos(t|\lambda|) - 1)\lambda - \frac{\langle \lambda, X \rangle}{|\lambda|}\sin(t|\lambda|)T_\alpha \tag{3.2}$$

が成り立つ．$S_\alpha \in \mathfrak{k}$ より

$$\mathrm{Ad}(\exp tS_\alpha)X \in \mathrm{Ad}(K)W(G, K)Z = \mathrm{Ad}(K)Z = L$$

である．一方，$X \in W(G, K)Z \subset \mathfrak{a}$ より $\mathrm{Ad}(a)X = X$，$\lambda \in \mathfrak{a}$ より $\mathrm{Ad}(a)\lambda = \lambda$，$\langle \lambda, H \rangle \in \pi\mathbb{Z}$ より $\mathrm{Ad}(a)T_\alpha = \pm T_\alpha$ であるから，(3.2) より

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ad}(a)T_\alpha = T_\alpha \text{のとき} \qquad \mathrm{Ad}(\exp tS_\alpha)X = \mathrm{Ad}(a)\mathrm{Ad}(\exp(tS_\alpha))X \in \mathrm{Ad}(a)L, \\ &\mathrm{Ad}(a)T_\alpha = -T_\alpha \text{のとき} \qquad \mathrm{Ad}(\exp tS_\alpha)X = \mathrm{Ad}(a)\mathrm{Ad}(\exp(-tS_\alpha))X \in \mathrm{Ad}(a)L \end{aligned}$$

が成り立つ．いずれの場合でも

$$\mathrm{Ad}(\exp tS_\alpha)X \in L \cap \mathrm{Ad}(a)L \quad (t \in \mathbb{R})$$

となり，$L \cap \mathrm{Ad}(a)L$ は離散的ではない． □

実旗多様体 $L = \mathrm{Ad}(K)Z$ は複素旗多様体 $M = \mathrm{Ad}(G)Z$ に実形として埋め込まれる．M の k 次の点対称に関する対蹠集合の最大基数を M の k-number と呼び，$\#_k M$ と表す．また，M の対蹠集合であって L に含まれるものの最大基数を $\#_I(L)$ と表す．これは Sánchez [7] が定義した L の index number $\#_I(L)$ と一致する．定理 2.2 により，これらの定義は $k \geq k_0$ の取り方に依存しないことを注意する．Sánchez [6, 7] と Berndt-Console-Fino [1] は複素旗多様体 M と実旗多様体 L について

$$\#_k(M) = \dim H^*(M, \mathbb{Z}_2), \qquad \#_I(L) = \dim H^*(L, \mathbb{Z}_2).$$

が成り立つことを示した．これと定理 3.2 により次の系を得る．

系 3.3. (G, K) が既約コンパクト型対称対であるとする．$g \in G$ について交叉 $L \cap \mathrm{Ad}(g)L$ が離散的であるならば次が成り立つ．

$$\#(L \cap \mathrm{Ad}(g)L) = \#_I(L) = \dim H^*(L, \mathbb{Z}_2).$$

3.1　$(G,K) = (SU(n), SO(n))$ の場合

複素旗多様体内の実旗多様体の交叉の例を与える．$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ とする．$n_1+\cdots+n_r < n$ をみたす正の整数 $n_1, \ldots, n_r, n$ に対して，旗多様体 $F^{\mathbb{K}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{K}^n)$ を

$$F^{\mathbb{K}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{K}^n) = \left\{ (V_1,\ldots,V_r) \;\middle|\; \begin{array}{l} V_i \text{ は } \mathbb{K}^n \text{ の } \mathbb{K} \text{ 部分空間} \\ \dim V_i = n_1+\cdots+n_i \\ V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n \end{array} \right\}$$

と定義する．

$\mathbb{R}^n$ の部分空間を複素化することにより，埋め込み $F^{\mathbb{R}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{R}^n) \subset F^{\mathbb{C}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{C}^n)$ を定める．$\mathbb{C}^n$ の複素共役は $F^{\mathbb{C}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{C}^n)$ に対合的反正則変換 σ を誘導し，σ による固定点集合が $F^{\mathbb{R}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{R}^n)$ になる．$F^{\mathbb{C}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{C}^n)$ には $SU(n)$ が推移的に作用し，$(\mathbb{C}^{n_1}, \mathbb{C}^{n_1+n_2}, \ldots, \mathbb{C}^{n_1+\cdots+n_r})$ におけるイソトロピー部分群は $S(U(n_1)\times\cdots\times U(n_{r+1}))$ となる．ここで，$n_{r+1} = n-(n_1+\cdots+n_r)$ である．したがって，$F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{C}^n)$ は $SU(n)/S(U(n_1)\times\cdots\times U(n_{r+1}))$ と微分同型になる．

対称対 $(SU(n), SO(n))$ の極大トーラスの共役性により

$$SU(n) = SO(n)\,A\,SO(n)$$

と分解される．ここで

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} z_1,\ldots,z_n \in U(1) \\ z_1\cdots z_n = 1 \end{array} \right\}.$$

この分解により，$g \in SU(n)$ を $g = g_1 a g_2$ $(g_1, g_2 \in SO(n), a \in A)$ と表す．このとき

$$F^{\mathbb{R}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{R}^n) \cap gF^{\mathbb{R}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{R}^n) = g_1(F^{\mathbb{R}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{R}^n) \cap aF^{\mathbb{R}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{R}^n))$$

となるので，交叉 $F^{\mathbb{R}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{R}^n) \cap aF^{\mathbb{R}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{R}^n)$ を調べれば十分である．

$a \in A$ に対して，a^2 による $\mathbb{C}^n$ の固有空間分解を

$$\mathbb{C}^n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s \tag{3.3}$$

と表す．このとき，a^2 が対角行列であることから，各固有空間 W_i は $\mathbb{C}^n$ の複素共役で不変な部分空間であり，$W_i^{\mathbb{R}} = W_i \cap \mathbb{R}^n$ とおくと

$$\mathbb{R}^n = W_1^{\mathbb{R}} \oplus \cdots \oplus W_s^{\mathbb{R}} \tag{3.4}$$

と分解される．$m = m_1+\cdots+m_s$ をみたす非負の整数 $m, m_1, \ldots, m_s$ について

$$F^{\mathbb{R}}_{m_1}(W_1^{\mathbb{R}}) \times\cdots\times F^{\mathbb{R}}_{m_s}(W_s^{\mathbb{R}}) = \{x_1\oplus\cdots\oplus x_s \in F^{\mathbb{R}}_m(\mathbb{R}^n) \mid x_i \in F^{\mathbb{R}}_{m_i}(W_i^{\mathbb{R}})\,(1 \le i \le s)\}$$

と定め，これを $F^{\mathbb{C}}_m(\mathbb{C}^n)$ の部分集合とみなす．このとき次が成り立つ．

命題 3.4 ([4]). $F_m^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ $(0 < m \leq n)$ 内において

$$F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{\substack{m_1+\cdots+m_s=m \\ 0\leq m_i \leq \dim_{\mathbb{C}} W_i (1\leq i\leq s)}} F_{m_1}^{\mathbb{R}}(W_1^{\mathbb{R}}) \times \cdots \times F_{m_s}^{\mathbb{R}}(W_s^{\mathbb{R}})$$

となる．交叉が離散的になるための必要十分条件はすべての i について $\dim_{\mathbb{C}} W_i = 1$ となることであり，このとき

$$F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \{W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_m} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n\}$$

となる．これは対称対 $(SU(n), SO(n))$ の Weyl 群の軌道であり，$SU(n)$ の Weyl 群の軌道でもある．さらに，$F_m^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ および $F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ の大対蹠集合である．

命題 3.5 ([4]). $F_{n_1,\ldots,n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ $(n_1 + \cdots + n_r < n)$ 内において

$$\begin{aligned}&F_{n_1,\ldots,n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_{n_1,\ldots,n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \\ &= \{(V_1,\ldots,V_r) \in F_{n_1,\ldots,n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \mid V_j \in F_{n_1+\cdots+n_j}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_{n_1+\cdots+n_j}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)\ (1 \leq j \leq r)\}\end{aligned}$$

となる．交叉が離散的になるための必要十分条件はすべての i について $\dim_{\mathbb{C}} W_i = 1$ となることであり，このとき

$$\begin{aligned}&F_{n_1,\ldots,n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_{n_1,\ldots,n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \\ &= \{(W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_{n_1}}, W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_{n_1+n_2}}, \ldots, W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_{n_1+\cdots+n_r}}) \\ &\quad \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{n_1} \leq n,\ 1 \leq i_{n_1+1} < \cdots < i_{n_1+n_2} \leq n, \ldots, \\ &\quad\ 1 \leq i_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1} < \cdots < i_{n_1+\cdots+n_r} \leq n, \\ &\quad\ \#\{i_1,\ldots,i_{n_1+\cdots+n_r}\} = n_1 + \cdots + n_r\}\end{aligned}$$

となる．これは対称対 $(SU(n), SO(n))$ の Weyl 群の軌道であり，$SU(n)$ の Weyl 群の軌道でもある．さらに，$F_{n_1,\ldots,n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ の極大対蹠集合である．

系 3.6. $F_{n_1,\ldots,n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ と $gF_{n_1,\ldots,n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ が離散的に交わるとき

$$\begin{aligned}&\#\Big(F_{n_1,\ldots,n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap gF_{n_1,\ldots,n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)\Big) \\ &= \#_k(F_{n_1,\ldots,n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)) = \dim H^*(F_{n_1,\ldots,n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n), \mathbb{Z}_2) \\ &= \#_I(F_{n_1,\ldots,n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)) = \dim H^*(F_{n_1,\ldots,n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n), \mathbb{Z}_2) \\ &= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_{r+1}!}.\end{aligned}$$

3.2 $(G, K) = (SU(2n), Sp(n))$ の場合

$\mathbb{C}^{2n}$ において

$$iv = \sqrt{-1}v, \qquad jv = J\bar{v}, \qquad kv = ijv \qquad (v \in \mathbb{C}^{2n})$$

によって i, j, k を定める．ここで，

$$J = \begin{bmatrix} O & 1_n \\ -1_n & O \end{bmatrix}.$$

この i, j, k により $\mathbb{C}^{2n}$ は四元数ベクトル空間 $\mathbb{H}^n$ と同一視される．$j : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$ は $F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n})$ の対合的反正則変換を誘導し，これにより固定される部分集合は $F^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n)$ と同一視できる．したがって，$F^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n)$ は $F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n})$ に実形として埋め込まれる．

対称対 $(SU(2n), Sp(n))$ の極大トーラスの共役性により

$$SU(2n) = Sp(n)\, A\, Sp(n)$$

と分解される．ここで

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} X & O \\ O & X \end{bmatrix} \,\middle|\, X = \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{bmatrix},\ \begin{array}{l} z_1, \ldots, z_n \in U(1) \\ z_1 \cdots z_n = 1 \end{array} \right\}.$$

この分解により，$g \in SU(2n)$ を $g = g_1 a g_2$ $(g_1, g_2 \in Sp(n), a \in A)$ と表す．このとき

$$F^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n) \cap gF^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n) = g_1(F^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n) \cap aF^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n))$$

となるので，交叉 $F^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n) \cap aF^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n)$ を調べれば十分である．

$a \in A$ に対して，a^2 による $\mathbb{C}^{2n}$ の固有空間分解を

$$\mathbb{C}^{2n} = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$$

と表す．このとき，各固有空間 W_i は j で不変であり，$\mathbb{H}^n \cong \mathbb{C}^{2n}$ の四元数部分空間になる．$m = m_1 + \cdots + m_s$ をみたす非負の整数 $m, m_1, \ldots, m_s$ について

$$F^{\mathbb{H}}_{m_1}(W_1) \times \cdots \times F^{\mathbb{H}}_{m_s}(W_s) = \{x_1 \oplus \cdots \oplus x_s \in F^{\mathbb{H}}_m(\mathbb{H}^n) \mid x_i \in F^{\mathbb{H}}_{m_i}(W_i)\,(1 \leq i \leq s)\}$$

と定め，これを $F^{\mathbb{C}}_{2m}(\mathbb{C}^{2n})$ の部分集合とみなす．このとき次が成り立つ．

命題 3.7 ([5])．$F^{\mathbb{C}}_{2m}(\mathbb{C}^{2n})$ $(0 < m \leq n)$ 内において

$$F^{\mathbb{H}}_m(\mathbb{H}^n) \cap aF^{\mathbb{H}}_m(\mathbb{H}^n) = \bigcup_{\substack{m_1 + \cdots + m_s = m \\ 0 \leq m_i \leq \dim_{\mathbb{H}}(W_i)(1 \leq i \leq s)}} F^{\mathbb{H}}_{m_1}(W_1) \times \cdots \times F^{\mathbb{H}}_{m_s}(W_s)$$

となる．交叉が離散的になるための必要十分条件はすべての i について $\dim_{\mathbb{H}} W_i = 1$ となることであり，このとき

$$F^{\mathbb{H}}_m(\mathbb{H}^n) \cap aF^{\mathbb{H}}_m(\mathbb{H}^n) = \{W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_m} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n\}$$

となる．これは対称対 $(SU(2n), Sp(n))$ の Weyl 群の軌道である．さらに，$F^{\mathbb{C}}_{2m}(\mathbb{C}^{2n})$ の対蹠集合であり，$F^{\mathbb{H}}_m(\mathbb{H}^n)$ の大対蹠集合である．

命題 3.8 ([5]). $F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\dots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n})$ $(n_1+\cdots+n_r<n)$ 内において

$$
\begin{aligned}
&F^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n)\cap aF^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n)\\
&=\{(V_1,\dots,V_r)\in F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\dots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n}) \mid V_j\in F^{\mathbb{H}}_{n_1+\cdots+n_j}(\mathbb{H}^n)\cap aF^{\mathbb{H}}_{n_1+\cdots+n_j}(\mathbb{H}^n)\ (1\le j\le r)\}
\end{aligned}
$$

となる．交叉が離散的になるための必要十分条件はすべての i について $\dim_{\mathbb{H}} W_i=1$ となることであり，このとき

$$
\begin{aligned}
&F^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n)\cap aF^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n)\\
&=\{(W_{i_1}\oplus\cdots\oplus W_{i_{n_1}}, W_{i_1}\oplus\cdots\oplus W_{i_{n_1+n_2}},\dots,W_{i_1}\oplus\cdots\oplus W_{i_{n_1+\cdots+n_r}})\\
&\quad \mid 1\le i_1<\cdots<i_{n_1}\le n,\ 1\le i_{n_1+1}<\cdots<i_{n_1+n_2}\le n,\dots,\\
&\quad\ 1\le i_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1}<\cdots<i_{n_1+\cdots+n_r}\le n,\\
&\quad\ \#\{i_1,\dots,i_{n_1+\cdots+n_r}\}=n_1+\cdots+n_r\}
\end{aligned}
$$

となる．これは対称対 $(SU(2n),Sp(n))$ の Weyl 群の軌道である．さらに，$F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\dots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n})$ の対蹠集合である．

系 3.9. $F^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n)$ と $gF^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n)$ が離散的に交わるとき

$$
\begin{aligned}
&\#\left(F^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n)\cap gF^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n)\right)\\
&= \#_I(F^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n))=\dim H^*(F^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n),\mathbb{Z}_2)\\
&= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_{r+1}!}\\
&< \#_k(F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\dots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n}))=\dim H^*(F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\dots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n}),\mathbb{Z}_2)\\
&= \frac{(2n)!}{(2n_1)!(2n_2)!\cdots(2n_{r+1})!}.
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] J. Berndt, S. Console and A. Fino, *On index number and topology of flag manifolds*, Differential Geom. Appl., **15** (2001), 81–90.

[2] B.-Y. Chen and T. Nagano, *A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre*, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.

[3] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, New York London, 1978.

[4] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *On the structure of the intersection of real flag manifolds in a complex flag manifold*, to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics.

[5] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *Lagrangian intersection theory and Hamiltonian volume minimizing problem*, Proceedings in Mathematics and Statistics **106**, ICM Satellite Conference on "Real and Complex Submanifolds", Daejeon, Korea, (2014), 391–399.

[6] C. Sánchez, *The invariant of Chen-Nagano on flag manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., **118**, No.4 (1993), 1237–1242.

[7] C. Sánchez, *The index number of an R-space: An extension of a result of M. Takeuchi*, Proc. Amer. Math. Soc., **125**, No.3 (1997), 893–900.

[8] M. Takeuchi, *On conjugate loci and cut loci of compact symmetric spaces I*, Tsukuba J. Math. **2** (1978), 35–68.

[9] M.S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan **64** (2012), 1297–1332.

[10] M.S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type II*, to appear in J. Math. Soc. Japan **67** (2015), 275–291.

[11] M.S. Tanaka and H. Tasaki, *Correction to: "The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type"* to appear in J. Math. Soc. Japan.

[12] H. Tasaki, *The intersection of two real forms in the complex hyperquadric*, Tohoku Math. J. **62** (2010), 375–382.