複素旗多様体内の四元数旗多様体の交叉の構造

入江博氏（東京電機大学）田崎博之氏（筑波大学）との共同研究

酒井 高司 （首都大学東京）

2014 年 9 月 5 日
研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2014」
東京理科大学森戸記念館

コンパクト対称空間の対蹠集合 (1/2)

M : コンパクト Riemann 対称空間

s_x : $x \in M$ における点対称

定義 (Chen-Nagano 1988)

1. $A \subset M$: **対蹠集合** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall x, y \in A$ について $s_x(y) = y$
2. $\#_2 M := \max\{\#A \mid A \subset M$: 対蹠集合 $\}$ **2-number**
3. $A \subset M$: **大対蹠集合** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\#A = \#_2 M$

命題

$N \subset M$: コンパクト全測地的部分多様体

$$\Longrightarrow \quad \#_2 N \leq \#_2 M$$

これはコンパクト対称空間の全測地的埋め込みの障害を与える.

コンパクト対称空間の対蹠集合 (2/2)

定理 (Chen-Nagano)

M : コンパクト対称空間

$$\Longrightarrow \qquad \#_2 M \geq \chi(M) \quad \text{Euler 数}$$

定理 (Takeuchi 1989)

M : 対称 R 空間 $\Longrightarrow \quad \#_2 M = \dim H_*(M, \mathbb{Z}_2)$

Example

$\mathbb{K}P^n \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$

$$s_\ell = 1_\ell - 1_{\ell^\perp} : \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$$

が $\ell \in \mathbb{K}P^n$ における点対称を与える．

$$A := \{\mathbb{K}e_1, \ldots, \mathbb{K}e_{n+1}\} \subset \mathbb{K}P^n \quad \text{大対蹠集合}$$

$$\#_2 \mathbb{K}P^n = n + 1 = \dim H_*(\mathbb{K}P^n, \mathbb{Z}_2)$$

Hermite 対称空間内の二つの実形の交叉

定義

M : Kähler 多様体

$\tau : M \to M$ 反正則対合的等長変換 $\tau^2 = \mathrm{id}_M,\ J \circ d\tau = -d\tau \circ J$

τ による M の固定点集合 $F(\tau, M)$ の一つの連結成分 L を M の**実形**と呼ぶ.

実形 $L \subset M$ は全測地的 Lagrange 部分多様体になる.

定理 (Tanaka-Tasaki 2012)

M : コンパクト型 Hermite 対称空間

$L_1, L_2 \subset M$: 実形, $\quad L_1 \pitchfork L_2$

$\Longrightarrow$ 交叉 $L_1 \cap L_2$ は L_1 および L_2 の対蹠集合になる.

さらに, L_1 と L_2 が互いに合同

$\Longrightarrow$ 交叉 $L_1 \cap L_2$ は L_1 および L_2 の大対蹠集合になる.

例

$\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$

$u \in U(n+1)$ について，$\mathbb{C}P^n$ 内で $\mathbb{R}P^n \pitchfork u\mathbb{R}P^n$ ならば

$$\mathbb{R}P^n \cap u\mathbb{R}P^n \cong \{\mathbb{C}e_1, \ldots, \mathbb{C}e_{n+1}\} \subset \mathbb{C}P^n$$

$$\begin{aligned}\#(\mathbb{R}P^n \cap u\mathbb{R}P^n) = n+1 &= \#_2\mathbb{R}P^n = \dim H_*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \\ &= \#_2\mathbb{C}P^n = \dim H_*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}_2)\end{aligned}$$

複素旗多様体と実旗多様体

(G, K) : コンパクト型対称対

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

$H \in \mathfrak{p}$

$$L := \mathrm{Ad}(K)H \subset \mathfrak{p} \quad : \text{実旗多様体}$$

実形 $\quad \cap$

$$M := \mathrm{Ad}(G)H \subset \mathfrak{g} \quad : \text{複素旗多様体}$$

$$\cong G/G_H \cong G^{\mathbb{C}}/P$$

$\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$: H を含む極大可換部分環

Δ : $\mathfrak{t}$ に関する $\mathfrak{g}$ のルート系

$$\mathfrak{g}_H = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = 0\} = \mathfrak{t} + \mathfrak{g} \cap \sum_{\substack{\alpha \in \Delta \\ \alpha(H)=0}} \mathfrak{g}_\alpha$$

複素旗多様体の対蹠集合 (1/3)

ここでは $\mathfrak{g}$ は単純と仮定する.

$$\Pi := \{\alpha_1, \dots, \alpha_q, \underbrace{\alpha_{q+1}, \dots, \alpha_p}_{\mathfrak{g}_H \text{ の単純ルート}}\} \subset \mathfrak{t}^* : \Delta \text{の基本系}$$

$$\{H_1, \dots, H_q, H_{q+1}, \dots, H_p\} : \mathfrak{t} \text{ の双対基底}$$

$$k_0 := 1 + \sum_{i=1}^{q} m_i \qquad \delta = \sum_{i=1}^{p} m_i \alpha_i \quad \text{最高ルート}$$

$$Z := \sum_{i=1}^{q} H_i \in \mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$$

$k \geq k_0$ に対して

$$g_k := \exp \frac{2\pi}{k} Z \in \exp \mathfrak{t} \subset G_H$$

$$s_H^{(k)} : M \to M;\ x \mapsto \mathrm{Ad}(g_k) x$$

と定めると, $s_H^{(k)}$ は $H \in M$ における M 上の k 次点対称を定める.

複素旗多様体の対蹠集合 (2/3)

定義

$A \subset M$: 対蹠集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in A$ について $s_x^{(k)}(y) = y$

命題 (Iriyeh-Tasaki-S.)

任意の $x \in M$ について，$s_x^{(k)}$ の固定点集合は次で与えられる．

$$F(s_x^{(k)}, M) = \{y \in M \mid [x, y] = 0\}.$$

特に，$F(s_x^{(k)}, M)$ は $k \geq k_0$ の選び方に依らない．

複素旗多様体の対蹠集合 (3/3)

定理 1 (Iriyeh-Tasaki-S.)

$A \subset M$: 極大対蹠集合

$\Longrightarrow$ 　極大可換部分環 $\mathfrak{t}' \subset \mathfrak{g}$ が存在して，次が成り立つ．

$$A = M \cap \mathfrak{t}'.$$

すなわち，A は $\mathfrak{t}'$ に関する $\mathfrak{g}$ の Weyl 群の軌道になる．特に，G のすべての極大対蹠集合は互いに共役である．

旗多様体のトポロジー

Theorem (Sánchez 1993, 1997, Berndt-Console-Fino 2001)

M : 複素旗多様体　L : 実旗多様体

$$\#_k(M) = \dim H_*(M, \mathbb{Z}_2) \quad (\forall k \geq k_0)$$
$$\#_I(L) = \dim H_*(L, \mathbb{Z}_2)$$

$L \subset M$

p は k_0 以上である最小の素数　L の指数

$$\#_k(M) := \max\{\#A_k \mid A_k \subset M : M \text{ の } k \text{ 対称 } s^{(k)} \text{による対蹠集合}\}$$
$$\#_I(L) := \max\{\#A_p \mid A_p \subset L : M \text{ の } p \text{ 対称 } s^{(p)} \text{による対蹠集合}\}$$

実旗多様体の交叉

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

$$F^{\mathbb{K}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n) := \left\{ (V_1, \dots, V_r) \;\middle|\; \begin{array}{l} V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n \\ \dim V_i = n_1 + \cdots + n_i \end{array} \right\}$$

1. $(SU(n), SO(n))$

$$\begin{array}{ll} L & = F^{\mathbb{R}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n) \cong SO(n)/S(O(n_1) \times \cdots \times O(n_{r+1})) \\ \cap & \\ M & = F^{\mathbb{C}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{C}^n) \cong SU(n)/S(U(n_1) \times \cdots \times U(n_{r+1})) \end{array}$$

2. $(SU(2n), Sp(n))$

$$\begin{array}{ll} L & = F^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n) \cong Sp(n)/Sp(n_1) \times \cdots \times Sp(n_{r+1}) \\ \cap & \\ M & = F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\dots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n}) \cong SU(2n)/S(U(2n_1) \times \cdots \times U(2n_{r+1})) \end{array}$$

$(SU(2n), Sp(n))$ の場合

$\mathbb{C}^{2n} \cong \mathbb{H}^n$

$$iv = \sqrt{-1}v, \qquad jv = J\bar{v}, \qquad kv = ijv \qquad (v \in \mathbb{C}^{2n})$$

$$J = \begin{bmatrix} O & 1_n \\ -1_n & O \end{bmatrix}$$

$$j : F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\dots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n}) \longrightarrow F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\dots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n}) \quad \text{反正則対合的等長変換}$$

$$F^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n) \subset F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\dots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n}) \quad \text{実形}$$

$(SU(2n), Sp(n))$ の場合

$$U(2n) = Sp(n)\,T\,Sp(n)$$

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} X & O \\ O & X \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} X = \mathrm{diag}(z_1, \ldots, z_n) \\ z_1, \ldots, z_n \in U(1) \end{array} \right\}$$

$u \in U(2n)$ に対して，$g_1, g_2 \in Sp(n)$ と $a \in T$ が存在して
$u = g_1 a g_2$ となる．

$$F^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n) \cap u F^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n) = g_1 \left(F^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n) \cap a F^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n) \right)$$

$$\mathbb{H}^n \cong \mathbb{C}^{2n} = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s \quad a^2 \text{による固有空間分解}$$

このとき，W_i $(1 \leq i \leq s)$ は $\mathbb{H}^n$ の四元数部分空間になる．

定理 2 (Iriyeh-Tasaki-S.)

$F_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$ における $F_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ と $aF_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ の交叉は

$$F_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \cap aF_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) = \bigcup_{\substack{m_1+\cdots+m_s=m \\ 0\leq m_i \leq \dim_{\mathbb{H}}(W_i)(1\leq i\leq s)}} F_{m_1}^{\mathbb{H}}(W_1)\times\cdots\times F_{m_s}^{\mathbb{H}}(W_s)$$

となる．交叉が横断的になるための必要十分条件はすべての $1 \leq i \leq s$ について $\dim_{\mathbb{H}} W_i = 1$ となることである．このとき，

$$F_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \cap aF_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) = \{W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_m} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n\}$$

となる．これは $F_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$ の対蹠集合であり，$F_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ の極大対蹠集合である．

$$\begin{aligned} & F_{m_1}^{\mathbb{H}}(W_1) \times \cdots \times F_{m_s}^{\mathbb{H}}(W_s) \\ = \ & \{x_1 \oplus \cdots \oplus x_s \in F_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \mid x_i \in F_{m_i}^{\mathbb{H}}(W_i)\,(1 \leq i \leq s)\} \end{aligned}$$

定理 3 (Iriyeh-Tasaki-S.)

$F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\dots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n})$ 内での $F^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n)$ と $aF^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n)$ の交叉は

$$\begin{aligned}
&F^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n) \cap aF^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n)\\
&= \{(V_1,\dots,V_r) \in F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\dots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n}) \mid \\
&\qquad V_j \in F^{\mathbb{H}}_{n_1+\cdots+n_j}(\mathbb{H}^n) \cap aF^{\mathbb{H}}_{n_1+\cdots+n_j}(\mathbb{H}^n)\ (1 \le j \le r)\}
\end{aligned}$$

となる．交叉が横断的になるための必要十分条件はすべての $1 \le i \le s$ について $\dim_{\mathbb{H}} W_i = 1$ となることである．このとき，

$$\begin{aligned}
&F^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n) \cap aF^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n)\\
&= \{(W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_{n_1}}, \dots, W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_{n_1+\cdots+n_r}})\\
&\qquad \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_{n_1} \le n,\ \dots, 1 \le i_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1} < \cdots\\
&\qquad\quad < i_{n_1+\cdots+n_r} \le n,\ \#\{i_1,\dots,i_{n_1+\cdots+n_r}\} = n_1 + \cdots + n_r\},
\end{aligned}$$

となる．これは $F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\dots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n})$ の対蹠集合である．

交点数

Corollary

$F^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n)$ と $uF^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n)$ が横断的に交わるとき

$$\begin{aligned}
&\#\left(F^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n)\cap uF^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n)\right)\\
&= \#_I(F^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n)) = \dim H^*(F^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n),\mathbb{Z}_2)\\
&= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_{r+1}!}\\
&< \#_k(F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n})) = \dim H^*(F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n}),\mathbb{Z}_2)\\
&= \frac{(2n)!}{(2n_1)!(2n_2)!\cdots(2n_{r+1})!}
\end{aligned}$$

ここで，$n_{r+1} := n-(n_1+\cdots+n_r)$.

$(SU(n), SO(n))$ の場合

$$U(n) = SO(n)\,T\,SO(n)$$

$$T = \{\mathrm{diag}(z_1, \dots, z_n) \mid z_1, \dots, z_n \in U(1)\}$$

$u \in U(n)$ に対して，$g_1, g_2 \in SO(n)$ と $a \in T$ が存在して
$u = g_1 a g_2$ となる．

$$F^{\mathbb{R}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n) \cap u F^{\mathbb{R}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n) = g_1 \left(F^{\mathbb{R}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n) \cap a F^{\mathbb{R}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n) \right)$$

$$\mathbb{C}^n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s \quad a^2 \text{による固有空間分解}$$

$$\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{R}^n \cap W_s) =: W_1^{\mathbb{R}} \oplus \cdots \oplus W_s^{\mathbb{R}}$$

定理 4 (Iriyeh-Tasaki-S.)

$F_m^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ 内における $F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ と $aF_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ の交叉は

$$F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{\substack{m_1+\cdots+m_s=m \\ 0\leq m_i\leq \dim_{\mathbb{C}}(W_i)(1\leq i\leq s)}} F_{m_1}^{\mathbb{R}}(W_1^{\mathbb{R}}) \times \cdots \times F_{m_s}^{\mathbb{R}}(W_s^{\mathbb{R}})$$

となる．交叉が横断的になるための必要十分条件はすべての $1 \leq i \leq s$ について $\dim_{\mathbb{C}} W_i = 1$ となることである．このとき，

$$F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \cap aF_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \{W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_m} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n\}$$

となる．これは $F_m^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ および $F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合である．

$$\begin{aligned} & F_{m_1}^{\mathbb{R}}(W_1^{\mathbb{R}}) \times \cdots \times F_{m_s}^{\mathbb{R}}(W_s^{\mathbb{R}}) \\ := \ & \{x_1 \oplus \cdots \oplus x_s \in F_m^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \mid x_i \in F_{m_i}^{\mathbb{R}}(W_i^{\mathbb{R}})\,(1 \leq i \leq s)\} \end{aligned}$$

定理 5 (Iriyeh-Tasaki-S.)

$F^{\mathbb{C}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{C}^n)$ 内における $F^{\mathbb{R}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n)$ と $aF^{\mathbb{R}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n)$ の交叉は

$$\begin{aligned}
&F^{\mathbb{R}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n) \cap aF^{\mathbb{R}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n)\\
&= \{(V_1,\dots,V_r) \in F^{\mathbb{C}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{C}^n) \mid\\
&\qquad\qquad V_j \in F^{\mathbb{R}}_{n_1+\cdots+n_j}(\mathbb{R}^n) \cap aF^{\mathbb{R}}_{n_1+\cdots+n_j}(\mathbb{R}^n)\ (1 \le j \le r)\}
\end{aligned}$$

となる．交叉が横断的になるための必要十分条件はすべての $1 \le i \le s$ について $\dim_{\mathbb{C}} W_i = 1$ となることである．このとき，

$$\begin{aligned}
&F^{\mathbb{R}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n) \cap aF^{\mathbb{R}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n)\\
&= \{(W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_{n_1}}, \dots, W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_{n_1+\cdots+n_r}})\\
&\qquad \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_{n_1} \le n, \dots, 1 \le i_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1} < \cdots\\
&\qquad\quad < i_{n_1+\cdots+n_r} \le n,\ \#\{i_1,\dots,i_{n_1+\cdots+n_r}\} = n_1+\cdots+n_r\}
\end{aligned}$$

となる．これは $F^{\mathbb{C}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{C}^n)$ の極大対蹠集合である．

交点数

系

$F^{\mathbb{R}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n)$ と $uF^{\mathbb{R}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n)$ が横断的に交わるとき

$$\begin{aligned}
&\#\left(F^{\mathbb{R}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n)\cap uF^{\mathbb{R}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n)\right)\\
&= \#_k(F^{\mathbb{C}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{C}^n)) = \dim H^*(F^{\mathbb{C}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{C}^n),\mathbb{Z}_2)\\
&= \#_I(F^{\mathbb{R}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n)) = \dim H^*(F^{\mathbb{R}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n),\mathbb{Z}_2)\\
&= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_{r+1}!}
\end{aligned}$$

ここで，$n_{r+1} := n-(n_1+\cdots+n_r)$.

今後の課題

1. コンパクト k 対称空間の対蹠集合の研究
2. 複素旗多様体の二つの実形の交叉の研究
3. Lagrange 部分多様体の Floer ホモロジーと Hamilton 体積最小性問題への応用