二つの実形の交叉と対称三対
The intersection of two real forms, and symmetric triad

井川　治　（京都工芸繊維大学）
(共同研究：田中真紀子，田崎博之)

2013 年 8 月 21 日　東京理科大学

キーワード

○ **Chen-**長野理論

(極 (地) と子午空間)

○ 実形の交叉

○ 対称三対 (既約ルート系の拡張)

○ **Hermann** 作用

(**compact** 対称空間への超極作用)

S^2 の二つの大円の交叉

$$\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$J = (1, 0, 0), \qquad M = S^2 = \mathrm{Ad}(SU(2))J$$

$$\tau : \mathfrak{su}(2) = \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{su}(2) = \mathbb{R}^3;$$

$$X = (x, y, z) \mapsto -\bar{X} = (x, -y, z)$$

$$F(\tau) = L = \{(\cos\theta, 0, \sin\theta)\} = S^1 \ni J$$

$$I_\tau : G = SU(2) \to G; g \mapsto \tau g \tau^{-1} = \bar{g}$$

$$F(I_\tau) = SO(2)$$

$$\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{p} \quad \text{(標準分解)}$$

$$\mathfrak{a} = \mathbb{R}J, \ \alpha = 2J$$

$$R = \{\pm\alpha\} = A_1, \quad W(R)\{\pm 1\}$$

$H \in \mathfrak{a}$ に対して

$\langle \alpha, H \rangle \in \pi\mathbb{Z}$ のとき, $S^1 = \mathrm{Ad}(\exp H)S^1$,

$\langle \alpha, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}$ のとき,

$$S^1 \cap \mathrm{Ad}(\exp H)S^1 = \{\pm J\} = W(R)J$$

compact 型既約 Hermite 対称空間 M

実形 $L = F(\tau) \subset M = G \cdot J \subset \mathfrak{g}$

$I_\tau : G \to G; g \mapsto \tau g \tau^{-1}$ (対合)

$(G, F(I_\tau)) \rightsquigarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ (標準分解)

極大可換 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \rightsquigarrow$ 制限ルート系 $R \subset \mathfrak{a}$

$H \in \mathfrak{a}$: 正則元 $\Leftrightarrow \langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}$ $(\lambda \in R)$

定理 (田中-田崎，I-田中-田崎)

(M, J) : **compact 型既約 Hermite**

対称空間 $\supset L$: 実形

$L \cap aL$: 離散的 $\Leftrightarrow H$: 正則元

$$(a = \exp H,\ H \in \mathfrak{a})$$

このとき，

$L \cap aL = M \cap \mathfrak{a} = W(R)J$

$= L$ の大対蹠集合

二つの実形 $L_i = F(\tau_i) \subset M = G \cdot J$

$\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$ とできる (松木敏彦).

$(G, F(I_{\tau_1}), F(I_{\tau_2})) \rightsquigarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{l}_2 \oplus \mathfrak{p}_2$

極大 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \rightsquigarrow$ 対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$

$H \in \mathfrak{a}$: 正則元 $\Leftrightarrow \langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}\ (\lambda \in \Sigma)$,

$$\langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\ (\alpha \in W)$$

定理 (I-田中-田崎)

(M, J) : **compact 型既約 Hermite**

対称空間 $\supset L_1, L_2$: 実形 $(L_1 \neq L_2)$

$L_1 \cap aL_2$: 離散的 $\Leftrightarrow H$: 正則元

$$(a = \exp H,\ H \in \mathfrak{a})$$

このとき,

$L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J \cap \mathfrak{a} = W(R_2)J \cap \mathfrak{a}$

ミスプリの修正 (お願い)　参考文献

[1] Froupes → Groupes

[4] Gifferential → Differential

次の $(M, L_1, L_2) \Rightarrow L_1 \cap aL_2 = W(R_1)J$

(1) $(G_n(\mathbb{C}^{2n}), U(n), G_n(\mathbb{R}^{2n}))$

(2)

$(Sp(2m)/U(2m), Sp(m), U(2m)/O(2m))$

(3)

$(SO(4m)/U(2m), U(2m)/Sp(m), SO(2m))$

(4)

$(E_7/T \cdot E_6, T \cdot E_6/F_4, (SU(8)/Sp(4))/\mathbb{Z}_2)$

(5) $(Q_{r+s+t-1}(\mathbb{C}), S^{r-1,s+t-1}, S^{r+s-1,t-1})$

$(s > 0, r < t)$

(6)

$(E_6/Spin(10)T, F_4/Spin(9), G_2(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2)$

(7)

$(G_{2q}(\mathbb{C}^{2(m+q)}), G_q(\mathbb{H}^{m+q}), G_{2q}(\mathbb{R}^{2(m+q)}))$

	$\tilde{\Sigma}$	R_1
(1)$\sim$ **(3)**	C_n	C_n
(4)	C_3	C_3
(5)	B_r	B_r
(6)	A_2	A_2
(7)	A_{m+q-1}	A_{m+q-1}

$(G_{2m}(\mathbb{C}^{4m}), G_m(\mathbb{H}^{2m}), U(2m))$ のとき,

$$\#(L_1 \cap aL_2) = 2^m$$

$$\#(W(R_1)J) = \begin{pmatrix} 2m \\ m \end{pmatrix}$$

$$\#(W(R_2)J) = 2^{2m}$$

$$\tilde{\Sigma} = C_m, \qquad R_1 = A_{2m-1}, \qquad R_2 = C_{2m}$$