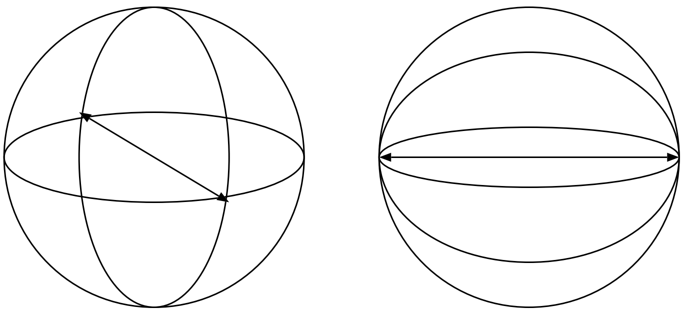
コンパクト型Hermite対称空間の二つの実形の交叉

田崎博之
筑波大学大学院数理物質科学研究科
tasaki@math.tsukuba.ac.jp

コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形 (ある種の全測地的 Lagrange 部分多様体) の交叉が対蹠集合であることを示す。二つの実形が合同であるならば、それらの交叉は大対蹠集合になる。さらに既約コンパクト Hermite 対称空間の二つの実形の交叉を記述することもできる。本講演の内容は [14] と東京理科大の田中真紀子さんとの共同研究 [13] に基づいている。

導入

最も簡単な場合の紹介から話を始める。一次元コンパクト型 Hermite 対称空間は、複素射影直線 $\mathbb{C}P^1$ であり、$\mathbb{C}P^1$ を二次元球面とみなすとその実形は大円である。$\mathbb{C}P^1$ 内の異なる二つの大円は二点で交わり、交点は対蹠点の対になっている。



この現象の一般化がすべてのコンパクト型 Hermite 対称空間についても成り立つことを示すのが、この講演の目的である。さらに、既約コンパクト Hermite 対称空間内の二つの実形の交点数も記述できる。基本的な部分多様体の交叉に関する情報は、交叉積分公式を定式化するために必要なことであり、この研究を始めた動機の一つである。また、実形は Lagrange 部分多様体になっていて、交点数がわかるだけではなく、二つの Lagrange 部分多様体の交叉の形が対蹠集合になるということ自身、私にとっては興味深い現象である。

1　主結果と関連事項

$\bar{M}$ を Hermite 対称空間とする。$\bar{M}$ の部分多様体 M が次の条件を満たすとき、M を $\bar{M}$ の**実形**と呼ぶ。ある対合的反正則等長変換 $\sigma : \bar{M} \to \bar{M}$ が存在し

$$M = \{x \in \bar{M} \mid \sigma(x) = x\}$$

が成り立つ。実形 M は $\bar{M}$ の全測地的 Lagrange 部分多様体になる。

基本的な Hermite 対称空間の実形の例を挙げておく。複素 Euclid 空間 $\mathbb{C}^n$ 内の自然に埋め込まれた実 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ は実形である。さらに、複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 内の自然に埋め込まれた実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ も実形である。$\mathbb{C}P^1$ 内の $\mathbb{R}P^1$ は最初に挙げた例である。

Leung[6]、竹内 [11] はコンパクト型 Hermite 対称空間の実形を分類している。たとえば、複素 Grassmann 多様体 $G_r^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n+r})$ 内の実形は、実 Grassmann 多様体 $G_r^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n+r})$、$n = 2m, r = 2q$ のときの四元数 Grassmann 多様体 $G_q^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{m+q})$、$n = r$ のときのユニタリ群 $U(n)$ でつきる。

Riemann 対称空間 M の点 x に関する点対称を s_x で表す。M の部分集合 S は次の条件を満たすとき、**対蹠集合**という。S のすべての点 x, y に対して $s_x y = y$ が成り立つ。M の対蹠集合の元の個数の上限を **2-number** といい $\#_2 M$ で表す。$\#_2 M$ を与える対蹠集合を**大対蹠集合**と呼ぶ。これらの概念は Chen-長野 [2] が導入した。

対蹠集合と 2-number に関する例を挙げておこう。n 次元球面 S^n の点 $x \in S^n$ をとると、x における点対称 s_x の不動点は x と $-x$ だけなので、$\{x, -x\}$ は大対蹠集合になる。したがって、$\#_2 S^n = 2$ が成り立つ。さらに、$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のとき $\mathbb{K}^{n+r}$ の正規直交基底 $u_1, \ldots, u_{n+r}$ をとると、

$$\{\{u_{i_1}, \ldots, u_{i_r}\}_{\mathbb{K}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n + r\}$$

は $G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r})$ の大対蹠集合になり、$\#_2 G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r}) = \begin{pmatrix} n+r \\ r \end{pmatrix}$ が成り立つ。対蹠集合の概念は線形代数における正規直交系の幾何学的拡張とみることができる。

竹内 [12] は、M が対称 R 空間ならば

$$\#_2 M = \dim H_*(M, \mathbb{Z}_2), \tag{1}$$

が成り立つことを証明した。ここで、$H_*(M, \mathbb{Z}_2)$ は M の係数 $\mathbb{Z}_2$ のホモロジー群である。竹内 [11] はコンパクト型 Hermite 対称空間の実形は対称 R 空間であることも示している。したがって、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形 L の 2-number は $\dim H_*(L, \mathbb{Z}_2)$ に一致する。

定理 1.1 M をコンパクト型 Hermite 対称空間とする。M の二つの実形 L_1, L_2 が横断的に交わるならば、$L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の対蹠集合になる。

定理 1.2 M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_1, L_2 を M の横断的に交わる合同な実形とする。このとき、$L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の大対蹠集合になる。すなわち、$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = \#_2 L_2$ が成り立つ。

定理 1.3 M を既約コンパクト Hermite 対称空間とし、L_1, L_2 を M 内の横断的に交わる二つの実形とする。

(1) $M = G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m})$ $(m \geq 2)$ であり、L_1 は $G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m})$ と合同、L_2 は $U(2m)$ と合同ならば、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 L_1 < 2^{2m} = \#_2 L_2.$$

(2) それ以外の場合、$L_1 \cap L_2$ は 2-number が小さい方の実形の大対蹠集合になり、次の等式が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}.$$

注意 1.4 定理 1.2 は最初に述べた $\mathbb{C}P^1$ の二つの異なる大円の交叉は対蹠点の対になることの一般化になっている。

複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の任意の実形は、自然に埋め込まれた実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ と合同になる。Howard[4] は、$\mathbb{C}P^n$ の実形 L_1 と L_2 が横断的に交わるならば $\#(L_1 \cap L_2) = n+1$ が成り立つことを示しているが、本質的には次の主張を示していることがわかる。$\mathbb{C}^{n+1}$ のユニタリ基底 $u_1, \ldots, u_{n+1}$ が存在し、$L_1 \cap L_2 = \{\mathbb{C}u_1, \ldots, \mathbb{C}u_{n+1}\}$ が成り立つ。特に、$L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の大対蹠集合になり、さらに $\mathbb{C}P^n$ の大対蹠集合にもなっている。その元の個数は $\#_2 \mathbb{R}P^n = \#_2 \mathbb{C}P^n = n+1$ に一致する。定理 1.2 はこの主張の一般化にもなっている。

Hermite 対称空間 M の Lagrange 部分多様体 L が次の条件を満たすとき、L を**大域的タイト**という (Oh[8])。L が $g \cdot L$ に横断的に交わるような M の任意の正則等長変換 g に対して

$$\#(L \cap g \cdot L) = \dim H_*(L, \mathbb{Z}_2)$$

が成り立つ。注意 1.4 より、$\mathbb{C}P^n$ の実形は大域的タイトになることがわかる。さらに、定理 1.2 と (1) より次の系が従う。

系 1.5 コンパクト型 Hermite 対称空間の任意の実形は大域的タイト Lagrange 部分多様体である。

注意 1.6 n 次元複素二次超曲面を $Q_n(\mathbb{C})$ で表す。$Q_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}P^1 = S^2$ であり、この実形である大円が大域的タイトであることはよく知られている。$Q_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 = S^2 \times S^2$ であり、この中の二種類の実形は大域的タイトになることを、Howard[4] の示した Poincaré の公式に基づいた積分幾何学の手法で、入江と酒井 [5] は示している。最近彼らは積分幾何学の同様の手法で $Q_n(\mathbb{C})$ 内の同様の二種類の実形も大域的タイトになることを示した。系 1.5 はこれらの結果の一般化になっている。

2 証明の概要

Frankel[3] の手法を利用して次の補題を得る。

補題 2.1 ([14]) M を正の正則断面曲率を持つコンパクト Kähler 多様体とする。このとき、M の全測地的コンパクト Lagrange 部分多様体 L_1, L_2 に対して、$L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.

コンパクト対称空間の極大トーラスに関する竹内 [10] の結果と最小軌跡に関する酒井 [9] の結果から、次の補題を導くことができる。

補題 2.2 A をコンパクト対称空間 M の原点 o を通る極大トーラスとする。A から決まるルート系により基本胞体 $S \subset \mathfrak{a}$ を定める。$\bar{S}$ はルート系によりある胞体分割 $\bar{S} = \cup_i S_i$ を持つ。A_1 を M の o を通るもう一つの極大トーラスとし、$A_1 \cap A \cap \mathrm{Exp} S_i \neq \emptyset$ ならば、$\mathrm{Exp} S_i \subset A_1 \cap A$ が成り立つ。

定理 1.1 の L_1, L_2 は、補題 2.1 より必ず交わり、補題 2.2 より交叉の形を特定でき、$L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の対蹠集合になることがわかる。

M をコンパクト対称空間とし、$p \in M$ とする。p における点対称 s_p の不動点集合 $F(s_p, M)$ を連結成分に分解し

$$F(s_p, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$$

としたとき、各連結成分 M_j^+ を M の p に関する**極地**と呼ぶ。極地は Chen-長野の導入した概念であり、Chen-長野 [1] や長野 [7] で詳しく調べられている。M がコンパクト型 Hermite 対称空間の場合、各極地 M_j^+ もコンパクト型 Hermite 対称空間になり、M の実形 L に対して $L \cap M_j^+ \neq \emptyset$ ならば $L \cap M_j^+$ は M_j^+ の実形になる。さらに o を通り横断的に交わる二つの実形 L_1, L_2 に対して、定理 1.1 より $L_1 \cap L_2$ は対蹠集合になるため $L_1 \cap L_2 \subset F(s_o, M)$ が成り立つ。よって

$$L_1 \cap L_2 = \bigcup_{j=0}^{r} \{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\}$$

となり、$L_1 \cap L_2$ の性質は各極地 M_j^+ の二つの実形 $L_1 \cap M_j^+$ と $L_2 \cap M_j^+$ の交叉の性質に帰着できる。これらを利用して極地による数学的帰納法によって定理 1.2 と定理 1.3 を証明できる。定理 1.3 の証明では M の極地 M_j^+ における二つの実形の交叉が既知のものでなければならないので、証明の順序に工夫が必要になる。また、M が既約であっても M_j^+ は既約になるとは限らない。たとえば複素 Grassmann 多様体の極地は、次元の小さい二つの複素 Grassmann 多様体の積になる。このため、既約ではない場合も考える必要がある。

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces, Duke Math. J. 44 (1977), 745–755.

[2] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc. 308 (1988), 273–297.

[3] T. Frankel, Manifolds with positive curvature, Pacific J. Math. 11 (1961), 165–174.

[4] R. Howard, The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces, Mem. Amer. Math. Soc., No.509, **106**, (1993)

[5] H. Iriyeh and T. Sakai, Tight Lagrangian surfaces in $S^2 \times S^2$, Geom. Dedicata 145 (2010), 1–17.

[6] D. P. S. Leung, Reflective submanifolds. IV, Classification of real forms of Hermitian symmetric spaces, J. Differential Geom. 14 (1979), 179–185.

[7] T. Nagano, The involutions of compact symmetric spaces, Tokyo J. Math. **11**(1988), 57–79.

[8] Y.-G. Oh, Tight Lagrangian submanifolds in $C\mathrm{P}^n$, Math. Z. 207 (1991), 409–416.

[9] T. Sakai, On cut loci of compact symmetric spaces, Hokkaido Math. J. 6 no. 1, (1977), 136–161.

[10] M. Takeuchi, On conjugate loci and cut loci of compact symmetric spaces I. Tsukuba J. Math. **2** (1978), 35 – 68.

[11] M. Takeuchi, Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces, Tohoku Math. J., (2) 36, 293–314 (1984)

[12] M. Takeuchi, Two-number of symmetric R-spaces, Nagoya Math. J. 115 (1989), 43–46.

[13] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, preprint (2010).

[14] H. Tasaki, The intersection of two real forms in the complex hyperquadric, to appear in Tohoku Math. J. 62 no.3 (2010).