コンパクト型Hermite
対称空間の二つの実形の交叉

田中真紀子さんとの共同研究

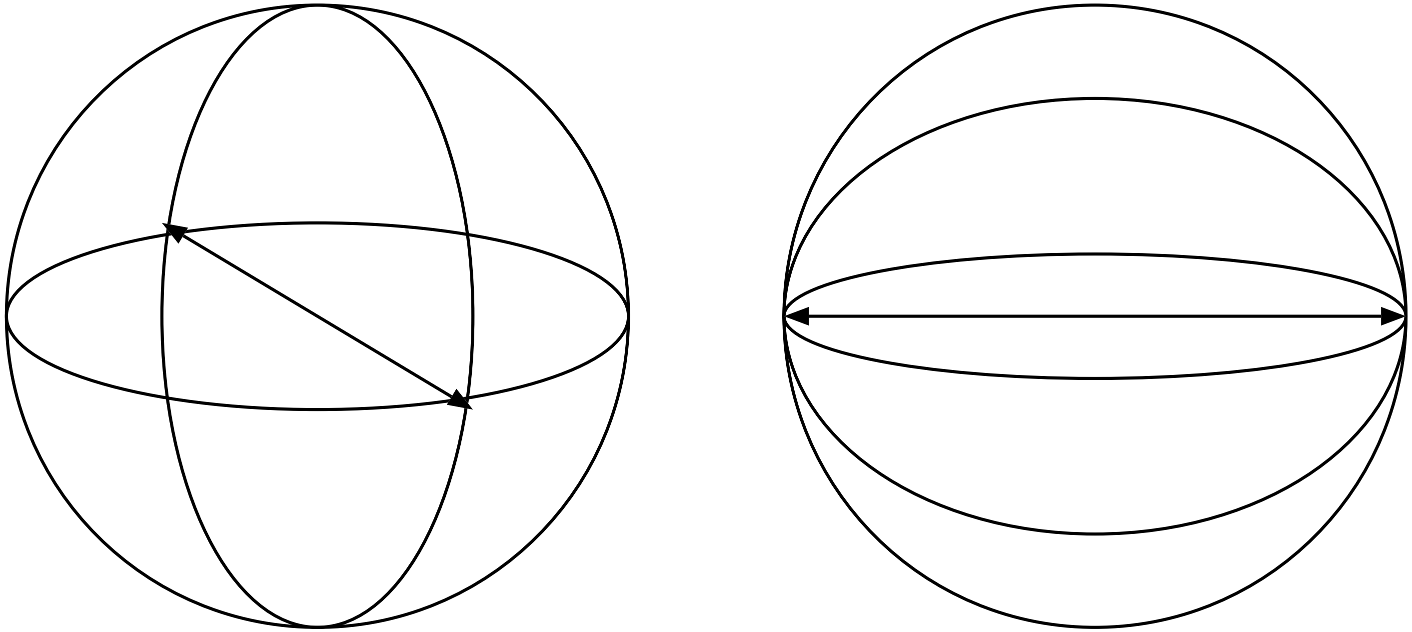
田崎博之

筑波大学数理物質科学研究科

幾何学シンポジウム

2010年8月8日

大円の交叉



対蹠点の対

1．主結果と関連事項

$\bar{M}$：Hermite対称空間

M：$\bar{M}$の実形

∃対合的反正則等長変換

$$\sigma : \bar{M} \to \bar{M}$$

$$M = \{x \in \bar{M} \mid \sigma(x) = x\}$$

実形：全測地的Lagrange部分多様体

実形の例

$$\mathbb{R}^{n} \subset \mathbb{C}^{n},$$

$$\mathbb{R}P^{n} \subset \mathbb{C}P^{n},$$

$\mathbb{R}P^{1} \subset \mathbb{C}P^{1}$: **最初の例**

$$G_{r}(\mathbb{R}^{r+n}) \subset G_{r}(\mathbb{C}^{r+n})$$

コンパクト型Hermite対称空間

実形の分類：Leung, 竹内

$$G_r^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n+r}) : G_r^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n+r}),$$

$$G_q^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{m+q}) \quad (n = 2m, r = 2q),$$

$$U(n) \quad (n = r)$$

M : Riemann対称空間

s_x : xに関する点対称 $x \in M$

$S \subset M$: **対蹠集合**

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \quad s_x y = y$

$\#_2 M$: Mの**2-number**

$= \sup\{\#S \mid S$は対蹠集合$\}$

S : **大対蹠集合**$\Leftrightarrow \#_2 M = \#S$

$\{x, -x\}$: S^n の大対蹠集合

$\#_2 S^n = 2$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

$\{\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}\}_{\mathbb{K}} \in G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r}) \mid$
標準基底から r 個とる$\}$

: $G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r})$ の大対蹠集合

$$\#_2 G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r}) = \binom{n+r}{r}$$

竹内：

M が対称 R 空間

$\Rightarrow \#_2 M = \dim H_*(M, \mathbb{Z}_2)$

コンパクト型 $\mathrm{Hermite}$

対称空間の実形：対称 R 空間

定理 1.1

M ： コンパクト型

Hermite 対称空間

L_1, L_2 ： M の実形、

横断的に交わる

$\Rightarrow$

$L_1 \cap L_2$ ： L_1 と L_2 の対蹠集合

定理 1.2

M ： コンパクト型

Hermite 対称空間

L_1, L_2 ： M の合同な実形、

横断的に交わる

$\Rightarrow$

$L_1 \cap L_2$ ： L_1 と L_2 の大対蹠集合

定理1.3

M : 既約コンパクト

Hermite対称空間

L_1, L_2 : M の実形、

横断的に交わり、$\#_2 L_1 \leq \#_2 L_2$

(1) $(M, L_1, L_2) \not\cong$

$(G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m}), G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m}), U(2m))$

$(m \geq 2)$

$\Rightarrow L_1 \cap L_2$: L_1 の大対蹠集合

$$(2)\ (M, L_1, L_2) \cong$$
$$(G^{\mathbb{C}}_{2m}(\mathbb{C}^{4m}), G^{\mathbb{H}}_{m}(\mathbb{H}^{2m}), U(2m))$$
$$(m \geq 2)$$
$$\Rightarrow$$

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m$$
$$< \binom{2m}{m} = \#_2 G^{\mathbb{H}}_m(\mathbb{H}^{2m})$$
$$< 2^{2m} = \#_2 U(2m)$$

2．証明の概要

補題 2.1

M ： コンパクト Kähler 多様体、

　　　正則断面曲率 > 0

L_1, L_2 ： M の全測地的コンパクト

　　　Lagrange 部分多様体

$\Rightarrow L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$

Frankel の定理と同様の証明法

補題 2.2

M：コンパクト対称空間

A：極大トーラス、$o \in A$

S：基本胞体 $\bar{S} = \cup_i S_i$

A_1：極大トーラス、$o \in A_1$

$A_1 \cap A \cap \mathrm{Exp} S_i \neq \emptyset$

$\Rightarrow \mathrm{Exp} S_i \subset A_1 \cap A$

実形の極大トーラス

補題 2.2

$\Rightarrow$

実形の極大トーラスの交叉

：基本胞体の頂点

$\Rightarrow$ 定理1.1

Chen-長野

M：コンパクト対称空間

$o \in M$の点対称 s_o

$$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$$

連結成分M_j^+：極地

極地：全測地的部分多様体、

コンパクト対称空間

M : コンパクト型

$\quad\quad\mathrm{Hermite}$対称空間

$\Rightarrow$ 各極地 M^+ : 同上

L : M の実形

$L \cap M^+ \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ $L \cap M^+$: M^+ の実形

M, L_1, L_2：定理1.2, 1.3

$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$

$o \in L_1 \cap L_2$としてよい

$L_1 \cap L_2 \subset F(s_o, M)$

$L_1 \cap L_2 =$

$\bigcup_{j=0}^{r} \{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\}$

極地による数学的帰納法