対称空間の対蹠集合

田崎博之
筑波大学数理物質系

Chen-長野の導入した対称空間の対蹠集合とは、対称空間のある有限部分集合であり、対称空間の形をおおまかに定めている枠組みのようなものである。対称空間の中でも特別なクラスを成す対称 R 空間では、扱いやすいことを示すよい性質を持っていることがわかっている。これに対して対称 R 空間ではない対称空間においては、対称 R 空間の対蹠集合が満たす性質が成り立たない例が多数存在することがわかってきた。対称 R 空間においては大対蹠集合さえわかれば対蹠集合の全貌がわかったのに対して、そうではない場合には極大対蹠集合をすべて把握する必要がある。この講演では主に対称 R 空間ではないコンパクト Lie 群と有向実 Grassmann 多様体の極大対蹠集合について今までに得られた結果を述べる。

1　対蹠集合

コンパクト Riemann 対称空間 M の点 x における点対称を s_x で表す。部分集合 $S \subset M$ の任意の元 x, y が $s_x(y) = y$ を満たすとき、S を M の**対蹠集合**という。対蹠集合の元の個数の最大値を与える対蹠集合を**大対蹠集合**という。以上の定義は Chen-長野 [1] による。

n 次元球面 S^n では $\{\pm x\}$ が大対蹠集合になる。n 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ では、$\mathbb{R}^{n+1}$ の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_{n+1}$ から定まる $\{\mathbb{R}e_1, \ldots, \mathbb{R}e_{n+1}\}$ が大対蹠集合になる。より一般に $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ に対する $\mathbb{K}^n$ 内の k 次元 $\mathbb{K}$ 部分空間全体の成す Grassmann 多様体 $G_k(\mathbb{K}^n)$ では、$\mathbb{K}^n$ の $\mathbb{K}$ 正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ から定まる

$$\{\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

が大対蹠集合になる。

2　対称 R 空間

Riemann 対称対の線形イソトロピー軌道が Riemann 対称空間になるとき、**対称 R 空間**という。球面や Grassmann 多様体などはその例である。コンパクト型 Hermite 対称空間も対称 R 空間の例である。コンパクト半単純 Lie 群を Riemann 対称空間とみなしたときの線形イソトロピー表現は随伴表現であり、この作用の特別な軌道としてコンパクト型 Hermite 対称空間を構成できるためである。対称 R 空間の Lie 環内の実現において、対称 R 空間の幾何学的性質と Lie 環の代数的性質との間には関連性があり、それを利用することで次の定理を得た。

定理 2.1 (田中-T.[9]) 対称 R 空間において次の (A)、(B) が成り立つ。

(A) 任意の対蹠集合に対して、それを含む大対蹠集合が存在する。

(B) 二つの大対蹠集合は合同になる。

全体空間の等長変換全体の単位連結成分の元で写り合う部分集合を**合同**という。

今回の講演の主題ではないので、対称 R 空間内のある種の部分多様体の離散的な交叉が対蹠集合になること、およびその拡張や応用についてはここで簡単に触れるに留める。対称 R 空間の特別な場合であるコンパクト型 Hermite 対称空間内の二つの実形の離散的な交叉は対蹠集合になり (T.[12], 田中-T.[8], [10], [11])、その Floer ホモロジーへの応用も得られた (入江-酒井-T.[5])。コンパクト型 Hermite 対称空間内の二つの実形の交叉が離散的になるための必要十分条件を含めたより詳しい情報もその後得られた (井川-田中-T.[3], [4])。この結果を得るために、コンパクト型 Hermite 対称空間がコンパクト半単純 Lie 群の随伴軌道になることと対称三対を利用した。これの一般化である複素旗多様体においても二つの実形の離散的な交叉に関する研究は現在進展中であり (入江-酒井-T.[6], [7])、その最新情報は今回の幾何学シンポジウムの奥田隆幸さんの講演内容に含まれている。

3　コンパクト Lie 群

コンパクト Lie 群には両側不変 Riemann 計量が存在し、これに関してコンパクト Riemann 対称空間になる。よって、コンパクト Lie 群の対蹠集合について考えることができる。コンパクト Lie 群の極大対蹠集合が単位元を含むとき、$\mathbb{Z}_2$ のいくつかの積に同型な部分群になることがわかる。多くの古典型コンパクト Lie 群は対称 R 空間になるが、一般にそれらの商群は対称 R 空間ではない。

この節では、特に $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ と $SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群に関して得られた結果を述べる。これらのほとんどは対称 R 空間ではない。

$$\Delta_n = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n), \quad \Delta_n^{\pm} = \{ g \in \Delta_n \mid \det g = \pm 1 \}$$

とすると、Δ_n と Δ_n^+ はそれぞれ $U(n)$ と $SU(n)$ の共役を除いて一意的な大対蹠部分群である。これに対してこれらの商群 $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ と $SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群を記述するにはさらに記号を準備する必要がある。

$$D[4] = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset O(2). \quad D^{\pm}[4] = \{ g \in D[4] \mid \det g = \pm 1 \}$$

によって二面体群 $D[4]$ とその部分集合 $D^{\pm}[4]$ を定める。自然数 n を 2 の冪 2^k と奇数 l の積 $2^k \cdot l$ に分解し、$0 \leq s \leq k$ に対して $D[4]$ の s 個のテンソル積と $\Delta_{n/2^s}$ のテンソル積を

$$C(s,n) = D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \Delta_{n/2^s} \subset O(n)$$

によって定める。

定理 3.1 (田中-T.) μ を自然数、$\mathbb{Z}_\mu$ を $U(n)$ の中心内の μ 次巡回群、θ を 1 の原始 2μ 乗根とする。$U(n)$ から $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ への自然な射影を π_n で表す。このとき、$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

(1) n または μ が奇数の場合、

$$\pi_n(\{1,\theta\}C(0,n)) = \pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n).$$

(2) n かつ μ が偶数の場合、

$$\pi_n(\{1,\theta\}C(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k).$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

注意 3.2 (2) の $(s,n) = (k-1,2^k)$ の場合は、$\Delta_2 \subsetneq D[4]$ という包含関係があるので、$C(k-1,2^k) \subsetneq C(k,2^k)$ が成り立ち、$C(k-1,2^k)$ は極大ではない。

定理 3.3 (田中-T.) μ を n の約数、$\mathbb{Z}_\mu$ を $SU(n)$ の中心内の μ 次巡回群、θ を 1 の原始 2μ 乗根とする。このとき、$SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

(1) n または μ が奇数の場合、

$$\pi_n(\Delta_n^+)$$

(2) n かつ μ が偶数の場合、

(a) $k = 1$ のとき、

$$\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta\Delta_n^-), \quad \pi_n((D^+[4] \cup \theta D^-[4]) \otimes \Delta_l).$$

ただし、$n = \mu = 2$ のときは $\pi_2(\Delta_2^+ \cup \theta\Delta_2^-)$ を除く。

(b) $k \geq 2$ のとき、$\mu = 2^{k'} \cdot l'$, $1 \leq k' \leq k$ であり、l' は l の約数とする。

(b1) $k' = k$ ならば、

$$\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta\Delta_n^-), \quad \pi_n(C(s,n)) \quad (1 \leq s \leq k).$$

ただし、$(s,n) = (k-1,2^k)$ の場合を除く。

(b2) $1 \leq k' < k$ ならば、

$$\pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n^+), \quad \pi_n(\{1,\theta\}C(s,n)) \quad (1 \leq s \leq k).$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除き、$n = 4$ の場合はさらに $\pi_4(\{1,\theta\}\Delta_4^+)$ を除く。

なお、$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ と $SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の対蹠集合の元の個数の最大値は Chen-長野 [1] が求めている。

定理 3.1 と 3.3 において、極大対蹠部分群の共役類がただ一つの場合は対称 R 空間の定理 2.1 と同じ主張が成り立つことになる。

4 有向実 Grassmann 多様体

この節では $\mathbb{R}^n$ 内の向きの付いた k 次元部分空間全体の成す有向実 Grassmann 多様体 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合が、$\{1,2,\ldots,n\}$ のある条件を満たす部分集合の族と対応することを示す。さらに、$k \leq 4$ の場合の分類と、$k \geq 5$ の場合の対蹠集合の元の個数の評価および大対蹠集合の決定に関する結果を紹介する。

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合を記述するために、記号を準備する。$[n] = \{1,\ldots,n\}$ とおく。部分集合 $\alpha \subset [n]$ に対して、α の元の個数を $|\alpha|$ で表す。自然数 $1 \leq k \leq n$ に対して

$$\binom{[n]}{k} = \{\alpha \subset [n] \mid |\alpha| = k\}$$

とおく。$\alpha, \beta \in \binom{[n]}{k}$ に対して $\alpha \backslash \beta = \{i \in \alpha \mid i \notin \beta\}$ の元の個数が偶数のとき、α, β は**対蹠的**という。部分集合 $A \subset \binom{[n]}{k}$ の任意の二元が対蹠的であるとき、A を**対蹠集合**という。二つの部分集合 $A, B \subset \binom{[n]}{k}$ が $[n]$ の置換で写り合うとき、A, B は**合同**であるという。

定理 4.1 (T.[13]) $e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底とする。極大対蹠集合 $A \subset \binom{[n]}{k}$ に対して

$$\{\pm \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_i \mid i \in \alpha\} \mid \alpha \in A\}$$

は $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合になり、この対応は $\binom{[n]}{k}$ の極大対蹠集合の合同類全体と $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合の合同類全体の間の一対一対応を与える。なお $\pm$ は二つの向きの両方を考えていることを意味する。

上の定理より $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合の分類は $\binom{[n]}{k}$ の極大対蹠集合の分類という組合せ論の問題に帰着する。帰着できたからといって簡単になったわけではなく、$\binom{[n]}{k}$ の極大対蹠集合の全貌はまだよくわかっていない。以下では $\binom{[n]}{k}$ の極大対蹠集合についてこれまでに得られた結果を述べる。

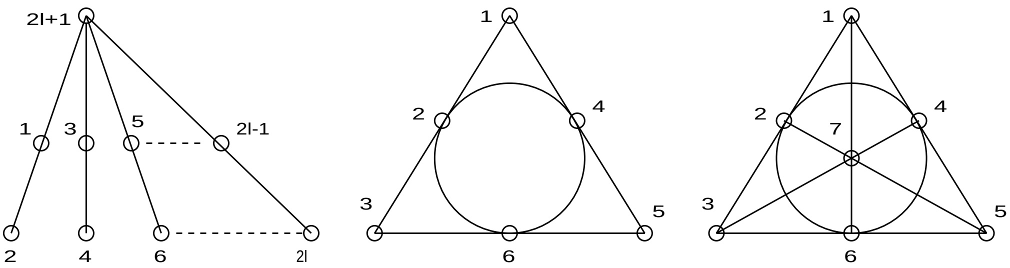
$k=1,2$ の場合の $\binom{[n]}{k}$ の極大対蹠集合の分類は簡単である。$k=1$ の場合、$\{\{1\}\}$ が唯一の $\binom{[n]}{1}$ の極大対蹠集合の合同類の代表元である。実数 x に対して、$\lfloor x \rfloor$ で x を越えない最大の整数を表す。$k=2$ の場合、

$$A(2,2l)=\{\{1,2\},\{3,4\},\dots,\{2l-1,2l\}\}\subset\binom{[2l]}{2}$$

とおくと、$A\left(2,2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$ が唯一の $\binom{[n]}{2}$ の極大対蹠集合の合同類の代表元である。この組合せは、Kähler 形式を定める基底の選び方と同じである。$k=3$ の場合、$\binom{[n]}{3}$ の対蹠集合 $A(3,2l+1)$, $B(3,6)$, $B(3,7)$ を次のように定める。

$$\begin{aligned}A(3,2l+1)&=\{\alpha\cup\{2l+1\}\mid\alpha\in A(2,2l)\},\\B(3,6)&=\{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{2,4,6\},\{3,5,6\}\},\\B(3,7)&=B(3,6)\cup\{\{1,6,7\},\{2,5,7\},\{3,4,7\}\}.\end{aligned}$$

これらの関係を把握しやすくするために視覚的に表現しておく。$B(3,7)$ の交叉の



構造は二元体 $\mathbb{F}_2=\{0,1\}$ 上の射影平面 (Fano 平面) の射影直線全体と同じである。$B(3,6)$ の組合せは、$\mathbb{C}^3$ 上の特殊 Lagrange 3 次形式を定める基底の選び方と同じである。$B(3,7)$ の組合せは、Harvey-Lawson が構成した $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ 上の G_2 不変 3 次形式を定める基底の選び方と同じである。

定理 4.2 (T.[13]) $l=\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ とする。$\binom{[n]}{3}$ の極大対蹠集合のすべての合同類の代表元は以下のとおり。

n	$3,4$	5	6	$7,8$	9 以上
	$A(3,3)$	$A(3,5)$	$B(3,6)$	$B(3,7)$	$A(3,2l+1), B(3,7)$

$k=4$ の場合、$\binom{[n]}{4}$ の対蹠集合 $A(4,2l)$, $B(4,7)$, $B(4,8)$ を次のように定める。

$$A(4,2l)=\{\alpha\cup\beta\mid\alpha,\beta\in A(2,2l),\ \alpha\neq\beta\}\subset\binom{2l}{4},$$

$$B(4,7)=\{[7]\backslash\alpha\mid\alpha\in B(3,7)\}\subset\binom{[7]}{4},$$

$$B(4,8)=B(4,7)\cup\{\alpha\cup\{8\}\mid\alpha\in B(3,7)\}\subset\binom{[8]}{4}.$$

$A(4,2l)$ の組合せは、Kähler 形式の 2 乗を定める基底の選び方と同じである。$B(4,7)$ の組合せは、Harvey-Lawson が構成した $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ 上の G_2 不変 4 次形式を定める基底の選び方と同じである。$B(4,8)$ の組合せは、Kraines が構成した $\mathbb{H}^2$ 上の $Sp(2)Sp(1)$ 不変 4 次形式を定める基底の選び方と同じである。

定理 4.3 (T.[13]) $\binom{[n]}{4}$ の極大対蹠的部分集合のすべての合同類の代表元は、

$$A(4,2l)\ (l \geq 2, \neq 4), \quad B(4,7), \quad B(4,8)$$

と合同なものしかるべき合併でつきる。

$k \leq 4$ の場合の $\binom{[n]}{k}$ の極大対蹠集合の分類結果を参考にして次の対蹠集合を定める。

$$A(2k,2l) = \{\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_k \mid \alpha_i \in A(2,2l), \text{これらは互いに異なる}\} \subset \binom{[2l]}{2k}$$

$$A(2k+1,2l+1) = \{\alpha \cup \{2l+1\} \mid \alpha \in A(2k,2l)\} \subset \binom{[2l+1]}{2k+1}$$

$$Ev_{2m} = \{\{i_1,\ldots,i_m\} \mid i_j \in \{2j-1,2j\}\ (1 \leq j \leq m), \text{偶数の } i_j \text{ は偶数個}\} \subset \binom{[2m]}{m}$$

定理 4.4 (T.[14]) $l \geq 3k+1$ のとき、

(1) $A(2k,2l)$ は $\binom{[2l]}{2k}, \binom{[2l+1]}{2k}$ の極大対蹠集合である。

(2) $A(2k+1,2l+1)$ は $\binom{[2l+1]}{2k+1}, \binom{[2l+2]}{2k+1}$ の極大対蹠集合である。

定理 4.5 (T.[14]) (1) $2m \equiv 2,4,6 \pmod 8$ のとき、Ev_{2m} は $\binom{[2m]}{m}$ の極大対蹠集合である。

(2) Ev_{8m} は $\binom{[8m]}{4m}$ の極大対蹠集合ではなく、$A(4m,8m) \cup Ev_{8m}$ は $\binom{[8m]}{4m}$ の極大対蹠集合である。

一般の $\binom{[n]}{k}$ の極大対蹠集合の全貌はわかっていないので、対蹠集合の元の個数の最大値について考える。

$$a(k,n) = \max\left\{ |A| \;\middle|\; A \text{ は } \binom{[n]}{k} \text{ の対蹠集合} \right\}$$

とおくと、$A(2k,2l), A(2k+1,2l+1)$ の存在から次の評価を得る。

$$a(2k,n) \geq \left| A\left(2k, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \right| = \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{k},$$

$$a(2k+1,n) \geq \left| A\left(2k+1, 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right) \right| = \binom{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}{k}.$$

$k \leq 4$ の場合の $\binom{[n]}{k}$ の極大対蹠集合の分類結果より、以下を得る。

$$a(1,n) = 1, \quad a(2,n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

n	4	5	6	$7, \ldots, 16$	17 以上
$a(3,n)$	1	2	4	7	$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$

n	5	6	7	$8, \ldots, 11$	12 以上
$a(4,n)$	1	3	7	14	$\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2}$

これらの結果を見ると、$k = 3, 4$ の場合、n が大きいとき先に得た $a(k,n)$ の評価の等号が成り立っていることがわかる。$\binom{[n]}{5}$ の極大対蹠集合の全貌はわかっていないが、大きい n に対して $a(5,n)$ を決定し、最大値を与える極大対蹠集合も決定できた。

定理 4.6 (T.[15]) $n \geq 87$ ならば

$$a(5,n) = \left| A\left(5, 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right) \right| = \binom{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}{2}.$$

さらに、最大値 $a(5,n)$ を与える $\binom{[n]}{5}$ の対蹠集合は $A\left(5, 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right)$ に合同である。

上の定理の証明方法では $k \geq 6$ の場合に同様の結果を得るのは難しいと思われたが、より洗練された方法によって次の結果が得られている。

定理 4.7 (Frankl-徳重 [2]) k に応じた十分大きな n に対して

$$a(2k,n) = \left| A\left(2k, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \right| = \binom{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{k},$$
$$a(2k+1,n) = \left| A\left(2k+1, 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right) \right| = \binom{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}{k}.$$

さらに最大値を与える対蹠集合はそれぞれの場合に

$$A\left(2k, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right), \quad A\left(2k+1, 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right)$$

に合同である。

なお論文 [2] では、対蹠集合を含むより一般的な条件を満たす $\binom{[n]}{k}$ の部分集合族の元の個数の評価を行なっているが、ここではその一部の結果を紹介した。

上記の結果だけで $\binom{[n]}{k}$ の極大対蹠集合の全貌を推測することは難しいが、前節で述べた $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ と $SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の場合のように比較的簡単な系列だけでは記述できないのかもしれない。

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc. 308 (1988), 273–297.

[2] P. Frankl and N. Tokushige, Uniform eventown problems, European J. Combinatorics 51 (2016) 280–286.

[3] O. Ikawa, M. S. Tanaka and H. Tasaki, The fixed point set of a holomorphic isometry and the intersection of two real forms in the complex Grassmann manifold, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 106, Y.J. Suh et al. (eds.), ICM Satellite Conference on "Real and Complex Submanifolds", (2014), 319–327.

[4] O. Ikawa, M. S. Tanaka and H. Tasaki, The fixed point set of a holomorphic isometry, the intersection of two real forms in a Hermitian symmetric space of compact type and symmetric triads, "Global Analysis and Differential Geometry on Manifolds," (special issue: the Kobayashi memorial volume), Internat. J. Math. 26 no.5 (2015), 1541005-1–32.

[5] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan 65 no.4 (2013), 1135-1151.

[6] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, Lagrangian intersection theory and Hamiltonian volume minimizing problem, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 106, Y.J. Suh et al. (eds.), ICM Satellite Conference on "Real and Complex Submanifolds", (2014), 391–399.

[7] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, On the structure of the intersection of real flag manifolds in a complex flag manifold, to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics.

[8] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan, 64 no.4 (2012), 1297–1332.

[9] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, Osaka J. Math. **50** (2013), 161–169.

[10] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type II, J. Math. Soc. Japan 67 (2015), 275–291.

[11] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Correction to: “The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type”, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[12] H. Tasaki, The intersection of two real forms in the complex hyperquadric, Tohoku Math. J. 62 no.3 (2010), 375–382.

[13] H. Tasaki, Antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds, Internat. J. Math. 24 no.8 (2013), 1350061-1–28.

[14] H. Tasaki, Sequences of maximal antipodal sets of oriented real Grassmann manifolds, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 106, Y.J. Suh et al. (eds.), ICM Satellite Conference on "Real and Complex Submanifolds", (2014), 515–524.

[15] H. Tasaki, Estimates of antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds, "Global Analysis and Differential Geometry on Manifolds," (special issue: the Kobayashi memorial volume), Internat. J. Math. 26 no.5 (2015), 1541008-1–12