対称空間の対蹠集合

田崎博之

筑波大学数理物質系

幾何学シンポジウム

2015年8月30日

1 対蹠集合

M : Riemann 対称空間

s_x : x に関する点対称 $x \in M$

$S \subset M$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \quad s_x y = y$

$|S|$: 集合 S の元の個数

$\#_2 M$: M の **2-number**

$= \sup\{|S| \mid S$ は対蹠集合$\}$

S : 大対蹠集合 $\Leftrightarrow \#_2 M = |S|$

$\{x, -x\}$: S^n の大対蹠集合

$\#_2 S^n = 2$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

$e_1, \ldots, e_n$: $\mathbb{K}^n$ の $\mathbb{K}$ 正規直交基底

$\{\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}\} \in G_r(\mathbb{K}^n) \mid$
$1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$
: $G_r(\mathbb{K}^n)$ の大対蹠集合

$$\#_2 G_r(\mathbb{K}^n) = \binom{n}{r}$$

2 対称 $\boldsymbol{R}$ 空間

Riemann 対称対の線形イソトロピー作用の軌道になる Riemann 対称空間: 対称 $\boldsymbol{R}$ 空間

等長変換全体の単位連結成分の元で写り合う

: 合同

定理 2.1(田中-T.)　対称 $\boldsymbol{R}$ 空間において

(A) $\forall$対蹠集合 $\subset$ $\exists$大対蹠集合

(B) 大対蹠集合同士は合同

大対蹠集合は対称 $\boldsymbol{R}$ 空間を線形イソトロピー作用が定める対称対の Weyl 群の軌道になる。

3 コンパクト Lie 群

コンパクト Lie 群：両側不変 Riemann 計量

$\Rightarrow$ コンパクト Riemann 対称空間

単位元を含む極大対蹠集合 $\Rightarrow$ 部分群

$\cong \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$

多くの古典型コンパクト Lie 群：対称 R 空間

古典型コンパクト Lie 群の商群：一般には対称 R 空間ではない

$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$, $SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群の分類結果を述べる。

$$\boldsymbol{\Delta}_n = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset \boldsymbol{O(n)},$$

$$\boldsymbol{\Delta}_n^{\pm} = \{\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{\Delta}_n \mid \det \boldsymbol{g} = \pm 1\}$$

$\boldsymbol{\Delta}_n$ と $\boldsymbol{\Delta}_n^{+}$ はそれぞれ $\boldsymbol{U(n)}$ と $\boldsymbol{SU(n)}$ の共役を除いて一意的な極大対蹠部分群

これらは大対蹠集合になり、定理 **2.1** と同じ主張が成り立つ。

$$\boldsymbol{D[4] = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset O(2),}$$

$$\boldsymbol{D^{\pm}[4] = \{g \in D[4] \mid \det g = \pm 1\}.}$$

$\boldsymbol{D[4]}$：二面体群、正四角形を不変にする自然数 $\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{n = 2^k \cdot l}$ ($\boldsymbol{l}$：奇数) と分解し、$\boldsymbol{0 \le s \le k}$ に対して $\boldsymbol{s}$ 個の $\boldsymbol{D[4]}$ と $\boldsymbol{\Delta_{n/2^s}}$ のテンソル積 $\boldsymbol{C(s,n)}$ を定める。

$$\boldsymbol{C(s,n) = D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \Delta_{n/2^s} \subset O(n)}$$

定理 3.1(田中-T.)　 μ : 自然数、

$\mathbb{Z}_\mu$: $U(n)$ の中心内の μ 次巡回群、

θ : 1 の原始 2μ 乗根、

$\pi_n : U(n) \to U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ 自然な射影

$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

(1) n または μ が奇数の場合、

$$\pi_n(\{1, \theta\}C(0, n)) = \pi_n(\{1, \theta\}\Delta_n)$$

(2) n かつ μ が偶数の場合、

$$\pi_n(\{1, \theta\}C(s, n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s, n) = (k - 1, 2^k)$ の場合を除く。

注意 3.2 $\boldsymbol{\Delta_2} \subsetneq \boldsymbol{D}[4]$ より

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{D}[4] \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{D}[4] \otimes \boldsymbol{\Delta_2} \\ &\subsetneq \boldsymbol{D}[4] \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{D}[4] \otimes \boldsymbol{D}[4] \end{aligned}$$

すなわち $\boldsymbol{C(k-1, 2^k)} \subsetneq \boldsymbol{C(k, 2^k)}$ が成り立ち、$\boldsymbol{C(k-1, 2^k)}$ は極大ではない。

定理 3.3(田中-T.) μ : n の約数、

$\mathbb{Z}_\mu$: $SU(n)$ の中心内の μ 次巡回群、

θ : 1 の原始 2μ 乗根、

$SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

(1) n または μ が奇数の場合、

$$\pi_n(\Delta_n^+)$$

(2) n かつ μ が偶数の場合、

(a) $k = 1$ のとき、

$$\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta\Delta_n^-), \pi_n((D^+[4] \cup \theta D^-[4]) \otimes \Delta_l)$$

ただし、$n = \mu = 2$ のときは $\pi_2(\Delta_2^+ \cup \theta\Delta_2^-)$

を除く。

(b) $\boldsymbol{k \geq 2}$ のとき、$\boldsymbol{\mu = 2^{k'} \cdot l'}$

(b1) $\boldsymbol{k' = k}$ ならば、

$\boldsymbol{\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta\Delta_n^-)}$,

$\boldsymbol{\pi_n(C(s, n)) \quad (1 \leq s \leq k)}$

ただし、$\boldsymbol{(s, n) = (k-1, 2^k)}$ の場合を除く。

(b2) $\boldsymbol{1 \leq k' < k}$ ならば、

$\boldsymbol{\pi_n(\{1, \theta\}\Delta_n^+)}$,

$\boldsymbol{\pi_n(\{1, \theta\}C(s, n)) \quad (1 \leq s \leq k)}$

ただし、$\boldsymbol{(s, n) = (k-1, 2^k)}$ の場合を除き、

$\boldsymbol{n = 4}$ の場合はさらに $\boldsymbol{\pi_4(\{1, \theta\}\Delta_4^+)}$ を除く。

注意 **3.4**

$\boldsymbol{\Delta}_4^+ = \boldsymbol{\Delta_2} \otimes \boldsymbol{\Delta_2} \subsetneqq \boldsymbol{D}[4] \otimes \boldsymbol{D}[4] = \boldsymbol{C}(\mathbf{2}, 4)$ が成り立つので、$\boldsymbol{\Delta}_4^+$ の場合は除かれる。

4 有向実 Grassmann 多様体

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$: $\mathbb{R}^n$ 内の有向 k 次元部分空間全体

$\mathrm{rank}\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n) = \min\{k, n-k\} \geq 3$

$\Rightarrow$ $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$: 対称 R 空間ではない

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合

$\leftrightarrow$ $\{1, \ldots, n\}$ のある部分集合族

$\Rightarrow$ 組合せ論の問題に帰着

$[n] = \{1, \ldots, n\}$

$1 \leq k \leq n$ に対して

$$\binom{[n]}{k} = \{\alpha \subset [n] \mid |\alpha| = k\}$$

$\alpha, \beta \in \binom{[n]}{k}$ に対して、α, β : 対蹠的

$\Leftrightarrow \alpha \backslash \beta = \{i \in \alpha \mid i \notin \beta\}$ の個数が偶数

部分集合 $A \subset \binom{[n]}{k}$: 対蹠的

$\Leftrightarrow$ A の任意の二元が対蹠的

部分集合 $A, B \subset \binom{[n]}{k}$: が合同

$\Leftrightarrow$ $[n]$ の置換で写り合う

定理 **4.1(T.)** $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$: $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底
極大対蹠集合 $\boldsymbol{A} \subset \binom{[n]}{\boldsymbol{k}}$ に対して

$$\{\pm \mathbf{span}_{\mathbb{R}}\{\boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{\alpha}\} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{A}\}$$

は $\tilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合
この対応は $\binom{[n]}{\boldsymbol{k}}$ の極大対蹠集合の合同類全体と
$\tilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合の合同類全体の間の一対一対応を与える。

$k = 1$ の場合

$\{\{1\}\}$: $\binom{[n]}{1}$ の極大対蹠集合

$\leftrightarrow \{\pm x\}$: $\tilde{G}_1(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}$ の極大対蹠集合

$\lfloor x \rfloor$: x を越えない最大の整数

$k = 2$ の場合

$\binom{[2l]}{2}$ の部分集合

$$A(2, 2l) = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{2l - 1, 2l\}\}$$

$A\left(2, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$: $\binom{[n]}{2}$ の極大対蹠集合

Kähler 形式を定める基底の選び方

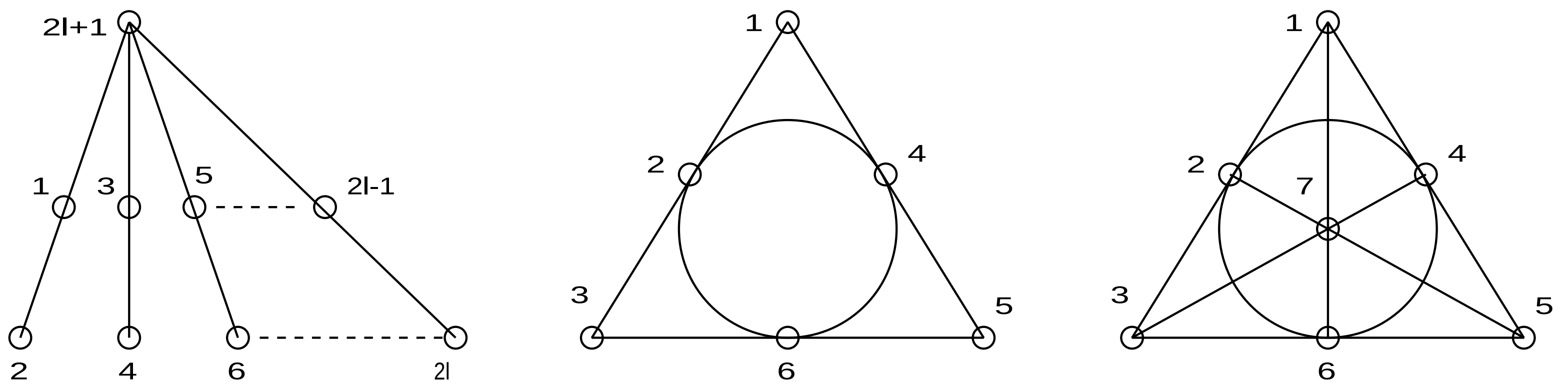
$\boldsymbol{k = 3}$ の場合

$\binom{[n]}{\boldsymbol{3}}$ の対蹠集合

$$\boldsymbol{A(3, 2l+1) = \{\alpha \cup \{2l+1\} \mid \alpha \in A(2, 2l)\}}$$

$$\boldsymbol{B(3, 6) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 5, 6\}\}}$$

$$\boldsymbol{B(3, 7) = B(3, 6) \cup \{\{1, 6, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 7\}\}}$$



定理 4.2(T.)　$\binom{[n]}{3}$ の極大対蹠集合：

n	$3, 4$	5	6	$7, 8$
	$A(3,3)$	$A(3,5)$	$B(3,6)$	$B(3,7)$

n	9 以上
	$A\left(3, 2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1\right), B(3,7)$

$\boldsymbol{k = 4}$ の場合

$\binom{[n]}{\boldsymbol{4}}$ の対蹠集合

$$\boldsymbol{A(4, 2l) = \{\alpha \cup \beta \mid \alpha, \beta \in A(2, 2l),\ \alpha \neq \beta\}}$$

$$\boldsymbol{B(4, 7) = \{[7] \backslash \alpha \mid \alpha \in B(3, 7)\}}$$

$$\boldsymbol{B(4, 8) = B(4, 7) \cup \{\alpha \cup \{8\} \mid \alpha \in B(3, 7)\}}$$

定理 **4.3(T.)** $\binom{[n]}{4}$ の極大対蹠集合：

$$A(4,2l)\ (l \geq 2, \neq 4),\quad B(4,7),\quad B(4,8)$$

と合同なもののしかるべき合併

$$a(k,n) = \max\left\{ |A| \;\middle|\; A\text{ は }\binom{[n]}{k}\text{ の対蹠集合} \right\}$$

とおくと、$A(2k,2l), A(2k+1,2l+1)$ の存在から次の評価を得る。

$$a(2k,n) \geq \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{k},$$

$$a(2k+1,n) \geq \binom{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}{k}.$$

$\boldsymbol{k \leq 4}$ の場合の $\binom{[n]}{k}$ の極大対蹠集合の分類結果より、以下を得る。

$$a(1,n) = 1, \quad a(2,n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

n	4	5	6	$7, \ldots, 16$	17 以上
$a(3,n)$	1	2	4	7	$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$

n	5	6	7	$8, \ldots, 11$	12 以上
$a(4,n)$	1	3	7	14	$\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2}$

$\boldsymbol{k = 5}$ の場合

定理 4.6(T.)　$\boldsymbol{n \geq 87}$ ならば

$$\boldsymbol{a(5, n) = \left| A\left(5, 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right) \right| = \binom{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}{2}}$$

$\boldsymbol{a(5, n)}$ を与える $\boldsymbol{\binom{[n]}{5}}$ の対蹠集合は

$$\boldsymbol{A\left(5, 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right)}$$

一般の $\boldsymbol{k}$ の場合

定理 4.7(Frankl-徳重)　$\boldsymbol{k}$ に応じた十分大きな $\boldsymbol{n}$ に対して

$$\boldsymbol{a(2k,n) = \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{k}},$$

$$\boldsymbol{a(2k+1,n) = \binom{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}{k}}.$$

最大値を与える対蹠集合はそれぞれの場合に

$$\boldsymbol{A\left(2k, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right), \quad A\left(2k+1, 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right)}$$