コンパクトLie群の極大対蹠部分群

田崎博之
筑波大学数理物質系

Chen-Nagano [1] はコンパクト Riemann 対称空間の対蹠集合の概念を導入した。コンパクト Lie 群の場合には極大対蹠部分群が特に重要になる。この講演では、古典型コンパクト Lie 群の商群、古典型コンパクト Lie 環の自己同型群、例外型コンパクト Lie 群 G_2 の極大対蹠部分群について田中-T.[2]、田中-T.[3]、田中-保倉-T.[4] で得られた結果を報告する。昨年度の幾何学シンポジウムでは、ユニタリ群と特殊ユニタリ群の商群の極大対蹠部分群に関する結果を発表したが (これは [2] の一部)、今回の講演は昨年度の講演の続きである。

1 対蹠集合

M をコンパクト Riemann 対称空間とし、点 $x \in M$ における点対称を s_x で表す。S を M の部分集合とする。S のすべての点 x, y に対して $s_x(y) = y$ が成り立つとき、S を**対蹠集合**という。M の対蹠集合の元の個数の最大値を与える対蹠集合を**大対蹠集合**と呼ぶ。M の大対蹠集合の元の個数を **2-number** と呼び、$\#_2 M$ で表す。これらは Chen-Nagano[1] が導入した概念である。等長変換全体の単位連結成分の作用で写り合う部分集合を**合同**ということにする。対称 R 空間の場合には、包含関係に関して極大な対蹠集合は大対蹠集合になり、大対蹠集合同士は合同になる。さらに、大対蹠集合はある Weyl 群の軌道になるため、対蹠集合の全貌を把握できる。それに比較して、対称 R 空間ではないコンパクト Riemann 対称空間の対蹠集合はそのような性質が成り立つとは限らず、よくわかっているとは言えない。論文 [1] の主な目的はコンパクト Riemann 対称空間の 2-number を決定することにあったが、対称 R 空間ではない場合には 2-number だけではなく極大対蹠集合の全体を求めることが問題になる。今回の講演の対象の多くは対称 R 空間ではない。例えば、古典型コンパクト Lie 群の商群のほとんどは対称 R 空間ではない。

コンパクト Lie 群には両側不変 Riemann 計量が存在し、これに関してコンパクト Riemann 対称空間になる。よって、コンパクト Lie 群の対蹠集合を考えることができる。コンパクト Lie 群の極大対蹠集合が単位元を含むとき、部分群になることがわかる。対蹠的であることから可換部分群になり、単位元以外の各元の位数は 2 になる。したがって、有限 Abel 群の基本定理より $\boldsymbol{Z}_2$ のいくつかの積に同型な可換部分群になることがわかる。$\boldsymbol{Z}_2$ のいくつかの積に同型な可換部分群の範囲で極大になる。逆に $\boldsymbol{Z}_2$ のいくつかの積に同型な可換部分群は対蹠的になるので、極大なものは極大対蹠部分群になる。したがって、コンパクト Lie 群の場合には、極大対蹠部分群が特に重要になる。大対蹠部分群の階数を **2-rank** と呼ぶ。コンパ

クト Lie 群 G の 2-rank を r_2G で表す。$\#_2G = 2^{r_2G}$ が成り立つ。r_2G は G の通常の階数以上になるが、一致するとは限らない。

コンパクト Lie 環 $\mathfrak{g}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ はコンパクト Lie 群になる。$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の極大対蹠部分群 A に対して、$A\backslash\{e\}$ は互いに可換な対合的な元の極大集合になる。逆に互いに可換な対合的な元の極大集合に単位元を加えると極大対蹠部分群になる。したがって、極大対蹠部分群を求めることは、互いに可換な対合的な元の極大集合を求めることと同じことである。

2 古典型コンパクト Lie 群の商群

古典型コンパクト Lie 群をその中心の部分群で割った商群の極大対蹠部分群の分類結果を述べる。そのために行列群のいくつかの有限部分群を導入しておく。

$$\Delta_n = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n), \quad \Delta_n^{\pm} = \{ g \in \Delta_n \mid \det g = \pm 1 \}$$

とすると、Δ_n と Δ_n^+ はそれぞれ $O(n), U(n), Sp(n)$ と $SO(n), SU(n)$ の共役を除いて一意的な極大対蹠部分群である。

$$D[4] = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset O(2). \quad D^{\pm}[4] = \{ g \in D[4] \mid \det g = \pm 1 \}$$

によって二面体群 $D[4]$ とその部分集合 $D^{\pm}[4]$ を定める。また、四元数の標準的な基底の ± 1 倍の全体を $Q[8] = \{\pm 1, \pm \boldsymbol{i}, \pm \boldsymbol{j}, \pm \boldsymbol{k}\}$ とおく。

自然数 n を 2 の冪 2^k と奇数 l の積 $2^k \cdot l$ に分解し、$0 \leq s \leq k$ に対して $D[4]$ の s 個のテンソル積と $\Delta_{n/2^s}$ のテンソル積を

$$D(s,n) = D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \Delta_{n/2^s} \subset O(n)$$

によって定める。

定理 2.1 ([2]) μ を自然数、$\boldsymbol{Z}_\mu$ を $U(n)$ の中心内の μ 次巡回群、θ を 1 の原始 2μ 乗根とする。$U(n)$ から $U(n)/\boldsymbol{Z}_\mu$ への自然な射影を π_n で表す。$U(n)/\boldsymbol{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

(1) n または μ が奇数の場合、$\pi_n(\{1,\theta\}C(0,n)) = \pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n)$.

(2) n かつ μ が偶数の場合、$\pi_n(\{1,\theta\}C(s,n))$ $(0 \leq s \leq k)$. ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

定理 2.2 ([2]) μ を n の約数、$\boldsymbol{Z}_\mu$ を $SU(n)$ の中心内の μ 次巡回群、θ を 1 の原始 2μ 乗根とする。$SU(n)/\boldsymbol{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

(1) n または μ が奇数の場合、$\pi_n(\Delta_n^+)$.

(2) n かつ μ が偶数の場合、

(a) $k = 1$ のとき、$\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta\Delta_n^-)$, $\pi_n((D^+[4] \cup \theta D^-[4]) \otimes \Delta_l)$. ただし、$n = \mu = 2$ のときは $\pi_2(\Delta_2^+ \cup \theta\Delta_2^-)$ を除く。

(b) $k \geq 2$ のとき、$\mu = 2^{k'} \cdot l'$, $1 \leq k' \leq k$ であり、l' は l の約数とする。

(b1) $k' = k$ ならば、$\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta\Delta_n^-)$, $\pi_n(C(s,n))$ $(1 \leq s \leq k)$. ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

(b2) $1 \leq k' < k$ ならば、$\pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n^+)$, $\pi_n(\{1,\theta\}C(s,n))$ $(1 \leq s \leq k)$. ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

定理 2.3 ([2]) 自然数 n を 2 の冪 2^k と奇数 l の積 $2^k \cdot l$ に分解する。

(I) $O(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。$\pi_n(C(s,n))$ $(0 \leq s \leq k)$. ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

(II) n が偶数のとき、$SO(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

(1) $k = 1$ の場合、$\pi_n(\Delta_n^+)$, $\pi_n(D^+[4] \otimes \Delta_l)$. ただし、$n = 2$ の場合は $\pi_2(\Delta_2^+)$ を除く。

(2) $k \geq 2$ の場合、$\pi_n(\Delta_n^+)$, $\pi_n(C(s,n))$ $(1 \leq s \leq k)$. ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除き、$n = 4$ の場合はさらに $\pi_4(\Delta_4^+)$ を除く。

(III) $Sp(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。
$\pi_n(Q[8] \cdot C(s,n))$ $(0 \leq s \leq k)$. ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

3 古典型コンパクト Lie 環の自己同型群

古典型コンパクト Lie 環の自己同型群の極大対蹠部分群の分類結果を述べる。

定理 3.1 ([3]) 自然数 n を 2 の冪 2^k と奇数 l の積 $2^k \cdot l$ に分解する。

(I) $\mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(n))$ の単位元を e で表し、$\tau : \mathfrak{su}(n) \to \mathfrak{su}(n)$; $X \mapsto \bar{X}$ によって τ を定める。$\mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(n))$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

$$\{e, \tau\}\mathrm{Ad}(D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k).$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

(II) $\mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(n))$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

$$\mathrm{Ad}(D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k).$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

(III) $\mathrm{Aut}(\mathfrak{sp}(n))$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

$$\mathrm{Ad}(Q[8] \cdot D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k).$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

この定理はおおむね前節の結果から得られるが、$\mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(n))$ の場合は

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(n)) = \mathrm{Ad}(U(n)) \cup \tau \mathrm{Ad}(U(n))$$

が成り立ち、前節の結果は $\mathrm{Ad}(U(n))$ にしか適用できない。そこで、$\mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(n))$ に Hermann 作用を利用して得られる非連結コンパクト Lie 群の元の標準形を使って、上記定理の (I) の分類結果を得る。

4 例外型コンパクト Lie 群 G_2

例外型コンパクト Lie 群 G_2 の極大対蹠部分群の分類結果を述べる。例外型コンパクト Lie 群 G_2 はルート系の形から、同型類はただ一つであり単連結なものだけで中心は単位元だけである。

G_2 の単位元 e における点対称の不動点集合 $F(s_e, G_2)$ は

$$F(s_e, G_2) = \{e\} \cup M_1^+, \quad M_1^+ \cong G_2/SO(4)$$

となり、任意の点 $o \in M_1^+$ に対して

$$F(s_o, M_1^+) = \{o\} \cup M_{1,1}^+, \quad M_{1,1}^+ \cong S^2 \times S^2/\boldsymbol{Z}_2$$

が成り立つ。$S^2 \times S^2/\boldsymbol{Z}_2$ の極大対蹠集合は、$\{[e_1, \pm f_1], [e_2, \pm f_2], [e_3, \pm f_3]\}$ に合同であり、大対蹠集合である。ここで、$e_1, e_2, e_3 \in S^2$ は第一因子の S^2 の互いに直交する元であり、$f_1, f_2, f_3 \in S^2$ は第二因子の S^2 の互いに直交する元である。これらより、次の定理を得る。

定理 4.1 ([4]) M_1^+ の極大対蹠集合は $\{o, [e_1, \pm f_1], [e_2, \pm f_2], [e_3, \pm f_3]\}$ に合同になり、大対蹠集合である。G_2 の極大対蹠部分群は $\{e, o, [e_1, \pm f_1], [e_2, \pm f_2], [e_3, \pm f_3]\}$ に共役になり、大対蹠部分群である。特に、$r_2 G_2 = 3$ が成り立つ。

G_2 を八元数 $\boldsymbol{O}$ の自己同型群として実現することにより、上記の G_2 の極大対蹠部分群を具体的に表示する。四元数を $\boldsymbol{H}$ で表し、Cayley-Dickson process により $\boldsymbol{O}$ を $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}$ で定義して

$$(m,a)(n,b) = (mn - \bar{b}a,\ a\bar{n} + bm) \qquad ((m,a),(n,b) \in \boldsymbol{O})$$

により $\boldsymbol{O}$ の積を定める。

$$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{O}) = \{\alpha \in GL_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{O}) \mid \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y); x, y \in \boldsymbol{O}\}$$

によって $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{O})$ を定めると、$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{O})$ は G_2 に同型であることがわかる。そこで $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{O})$ を G_2 と同一視する。$(p,q) \in Sp(1)^2 \subset \boldsymbol{O}$ に対して

$$\psi(p,q)(m,a) = (qm\bar{q}, pa\bar{q}) \qquad ((m,a) \in \boldsymbol{O})$$

によって $\psi(p,q) \in GL_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{O})$ を定める。すると $\psi(p,q) \in G_2$ となり、ψ は $Sp(1)^2$ から G_2 への準同型写像になる。さらに $\gamma = \psi(1,-1)$ とおくと、$\gamma \in M_1^+$ が成り立ち、

$$M_1^+ = \{g\gamma g^{-1} \mid g \in G_2\} \cong G_2/\psi(Sp(1)^2),$$
$$\psi(Sp(1)^2) = \{g \in G_2 \mid g\gamma g^{-1} = \gamma\} \cong SO(4)$$

を確認できる。定理 4.1 の o を γ とすると、

$$M_{1,1}^+ = \{\psi(p,q) \mid p^2 = q^2 = -1\} \cong S^2 \times S^2/\boldsymbol{Z}_2$$

となり、$M_{1,1}^+$ の極大対蹠集合は $\{\psi(\boldsymbol{i}, \pm\boldsymbol{i}), \psi(\boldsymbol{j}, \pm\boldsymbol{j}), \psi(\boldsymbol{k}, \pm\boldsymbol{k})\}$ に合同になる。これらより、次の定理を得る。

定理 4.2 ([4]) M_1^+ の極大対蹠集合は $\{\psi(1,-1), \psi(\boldsymbol{i}, \pm\boldsymbol{i}), \psi(\boldsymbol{j}, \pm\boldsymbol{j}), \psi(\boldsymbol{k}, \pm\boldsymbol{k})\}$ に合同になる。G_2 の極大対蹠部分群は $\{\psi(1,\pm 1), \psi(\boldsymbol{i}, \pm\boldsymbol{i}), \psi(\boldsymbol{j}, \pm\boldsymbol{j}), \psi(\boldsymbol{k}, \pm\boldsymbol{k})\}$ に共役になる。

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc. 308 (1988), 273–297.

[2] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal subgroups of compact Lie groups, preprint.

[3] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal subgroups of the automorphism groups of compact Lie algebras, preprint.

[4] M. S. Tanaka, H. Tasaki and O. Yasukura, Maximal antipodal subgroups of the compact Lie group G_2 of exceptional type, in preparation.