コンパクトLie群の極大対蹠部分群

田崎博之

筑波大学数理物質系

幾何学シンポジウム
2016年8月28日

極大対蹠部分群の分類

古典型コンパクト Lie 群の商群

古典型コンパクト Lie 環の自己同型群

(田中-T.)

例外型コンパクト Lie 群 G_2

(田中-保倉-T.)

1. 対蹠集合

M : Riemann対称空間

s_x : xに関する点対称 $x \in M$

$S \subset M$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \quad s_x y = y$

$|S|$: 集合Sの元の個数

$\#_2 M$: Mの2-number

$= \sup\{|S| \mid S$は対蹠集合$\}$

S : 大対蹠集合$\Leftrightarrow \#_2 M = |S|$

Riemann 対称対の線形イソトロピー作用の軌道になる Riemann 対称空間: **対称 R 空間**

等長変換全体の単位連結成分の元で写り合う

: **合同**

定理 1.1(田中-T.)　対称 R 空間において

(A) $\forall$ 対蹠集合 $\subset$ $\exists$ 大対蹠集合

(B) 大対蹠集合同士は合同

大対蹠集合は対称 R 空間を線形イソトロピー作用が定める対称対の Weyl 群の軌道になる。

2. 古典型コンパクト Lie 群の商群

コンパクト Lie 群：両側不変 Riemann 計量

$\Rightarrow$ コンパクト Riemann 対称空間

単位元を含む極大対蹠集合 $\Rightarrow$ 部分群

$\cong \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$

多くの古典型コンパクト Lie 群：対称 R 空間

古典型コンパクト Lie 群の商群：一般には対称

R 空間ではない

$$\boldsymbol{\Delta}_n = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset \boldsymbol{O(n)},$$

$$\boldsymbol{\Delta}_n^+ = \{ \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{\Delta}_n \mid \det \boldsymbol{g} = 1 \}$$

Δ_n と Δ_n^+ はそれぞれ $U(n)$, $O(n)$, $Sp(n)$ と $SU(n)$, $SO(n)$ の共役を除いて一意的な極大対蹠部分群

これらは大対蹠集合になり、定理 1.1 の (A) と (B) が成り立つ。

$$D[4] = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset O(2)$$

$$Q[8] = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

自然数 n **を** $n = 2^k \cdot l$ (l **: 奇数**) **と分解し、**

$0 \leq s \leq k$ **に対して**

$$D(s, n)$$

$$= D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \Delta_{n/2^s}$$

$$= \{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \mid d_i \in D[4], d_0 \in \Delta_{n/2^s}\}$$

定理 2.1(田中-T.)　μ : 自然数、
$\mathbb{Z}_\mu$: $U(n)$ の中心内の μ 次巡回群、
θ : 1 の原始 2μ 乗根、
$\pi_n : U(n) \to U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ 自然な射影
$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

(1) n または μ が奇数の場合、

$$\pi_n(\{1, \theta\}D(0, n)) = \pi_n(\{1, \theta\}\Delta_n)$$

(2) n かつ μ が偶数の場合、

$$\pi_n(\{1, \theta\}D(s, n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

注意　$\boldsymbol{\Delta_2} \subsetneq D[4]$ より

$$D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \boldsymbol{\Delta_2}$$
$$\subsetneq D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes D[4]$$

すなわち $D(k-1, 2^k) \subsetneq D(k, 2^k)$ が成り立ち、$D(k-1, 2^k)$ は極大ではない。

定理 2.2(田中-T.)　μ : n の約数、

$\mathbb{Z}_\mu$: $SU(n)$ の中心内の μ 次巡回群、

θ : 1 の原始 2μ 乗根、

$SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群の共役類は、

$\mathbf{\Delta}_n, D[4], D(s,n), \theta$ を使って記述できる。

詳しい結果は予稿集参照

定理 2.3(田中-T.)

(I) $O(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

$$\pi_n(D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n)=(k-1,2^k)$ の場合を除く。

(II) n : 偶数、$SO(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠部分群は $\Delta_n, D[4], D(s,n)$ を使って記述できる。

(III) $Sp(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

$$\pi_n(Q[8]\cdot D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n)=(k-1,2^k)$ の場合を除く。

3. コンパクトLie環の自己同型群

定理 3.1(田中-T.)

(I) $\tau : \mathfrak{su}(n) \to \mathfrak{su}(n); X \mapsto \bar{X}$

$\mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(n))$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

$$\{e, \tau\}\mathrm{Ad}(D(s, n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

(II) $\mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(n))$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

$$\mathrm{Ad}(D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

(III) $\mathrm{Aut}(\mathfrak{sp}(n))$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

$$\mathrm{Ad}(Q[8] \cdot D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

4. 例外型コンパクト Lie 群 G_2

$F(s_e, G_2) = \{e\} \cup M_1^+$, $M_1^+ \cong G_2/SO(4)$

$o \in M_1^+$, $F(s_o, M_1^+) = \{o\} \cup M_{1,1}^+$

$M_{1,1}^+ \cong (S^2 \times S^2)/\mathbb{Z}_2$ これの極大対蹠集合

$A = \{[e_1, \pm f_1], [e_2, \pm f_2], [e_3, \pm f_3]\}$

$A_{1,1}$: A に対応する $M_{1,1}^+$ の極大対蹠集合

定理 4.1(田中-保倉-T.)

$\{o\} \cup A_{1,1}$: M_1^+ の極大対蹠集合

$\{e, o\} \cup A_{1,1}$: G_2 の極大対蹠部分群

いずれも合同、共役を除いて一意的

$G_2 = \mathrm{Aut}(O)$ とみなせる。

準同型 $\psi : Sp(1) \times Sp(1) \to G_2$ を定めることができ、

$$SO(4) \cong \psi(Sp(1) \times Sp(1)) \subset G_2$$

定理 4.2(田中-保倉-T.)

M_1^+ の極大対蹠集合は

$\{\psi(1, -1), \psi(i, \pm i), \psi(j, \pm j), \psi(k, \pm k)\}$ に合同になる。G_2 の極大対蹠部分群は

$\{\psi(1, \pm 1), \psi(i, \pm i), \psi(j, \pm j), \psi(k, \pm k)\}$ に共役になる。