

コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉

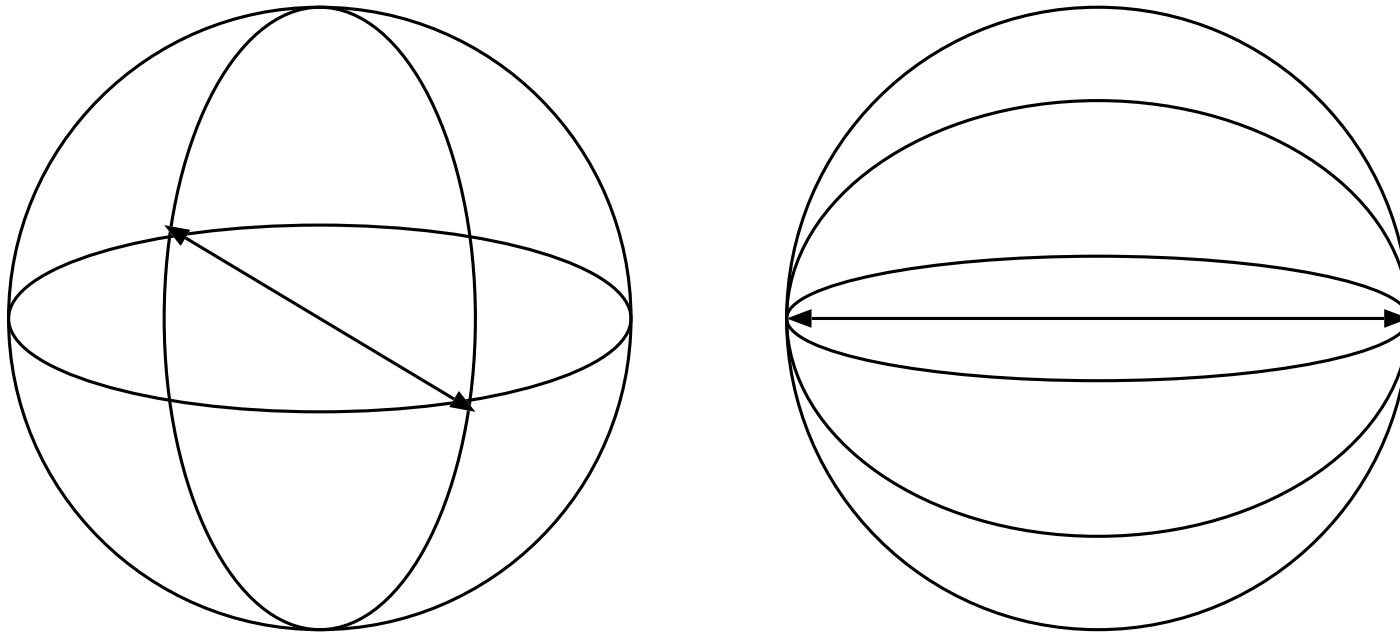
田中真紀子さんとの共同研究

田崎博之

筑波大学数理物質科学研究科

2011 年 8 月 4 日

大円の交叉



対蹠点の対

1. 主結果と関連事項

$\bar{M}$: Hermite 対称空間

M : $\bar{M}$ の実形

$\exists$ 対合的反正則等長変換

$$\sigma : \bar{M} \rightarrow \bar{M}$$

$$M = \{x \in \bar{M} \mid \sigma(x) = x\}$$

実形 : 全測地的 Lagrange 部分多様体

実形の例

$$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n,$$

$$\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n,$$

$$\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{C}P^1 : \text{最初の例}$$

$$G_r(\mathbb{R}^{r+n}) \subset G_r(\mathbb{C}^{r+n})$$

コンパクト型 Hermite 対称空間

実形の分類 : Leung, 竹内

$$G_r^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n+r}) : G_r^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n+r}),$$

$$G_q^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{m+q}) \quad (n = 2m, r = 2q),$$

$$U(n) \quad (n = r)$$

M : Riemann 対称空間

s_x : x に関する点対称 $x \in M$

$S \subset M$: 対蹠集合

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \quad s_x y = y$$

$\#_2 M$: M の 2-number

$$= \sup \{ \#S \mid S \text{ は対蹠集合} \}$$

S : 大対蹠集合 $\Leftrightarrow \#_2 M = \#S$

$\{x, -x\} : S^n$ の大対蹠集合

$$\#_2 S^n = 2$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$$

$\{\{e_{i_1}, \dots, e_{i_r}\}_{\mathbb{K}} \in G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r}) \mid$
標準基底から r 個とる $\}$

$: G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r})$ の大対蹠集合

$$\#_2 G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r}) = \binom{n+r}{r}$$

竹内：

M が対称 R 空間

$$\Rightarrow \#_2 M = \dim H_*(M, \mathbb{Z}_2)$$

コンパクト型 Hermite

対称空間の実形：対称 R 空間

定理 1.1 (Tanaka-T.)

M : コンパクト型

Hermite 対称空間

L_1, L_2 : M の実形、 $L_1 \pitchfork L_2$

$\Rightarrow$

$L_1 \cap L_2$: L_1 と L_2 の対蹠集合

定理 1.2 (Tanaka-T.)

M : コンパクト型

Hermite 対称空間

L_1, L_2, L'_1, L'_2 : M の実形、

L_i, L'_i は合同 ($i = 1, 2$)

$L_1 \pitchfork L_2, L'_1 \pitchfork L'_2$

$$\Rightarrow \#(L_1 \cap L_2) = \#(L'_1 \cap L'_2)$$

定理 1.3 (Tanaka-T.)

M : コンパクト型

Hermite 対称空間

L_1, L_2 : M の合同な実形、

$$L_1 \cap L_2$$

$\Rightarrow$

$L_1 \cap L_2$: L_1 と L_2 の大対蹠集合

定理 1.4(Tanaka-T.)

M : 既約コンパクト型

Hermite 対称空間

L_1, L_2 : M の実形、 $L_1 \cap L_2$

$$\dim L_1 \leq \dim L_2$$

$$(1) (M, L_1, L_2) \not\cong$$

$$(G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m}), G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m}), U(2m))$$

$$(m \geq 2)$$

$\Rightarrow L_1 \cap L_2$: L_1 の大対蹠集合

$$\begin{aligned}
(2) \quad & (M, L_1, L_2) \cong \\
& (G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m}), G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m}), U(2m)) \\
& (m \geq 2)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m$$

$$< \binom{2m}{m} = \#_2 G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m})$$

$$< 2^{2m} = \#_2 U(2m)$$

定理 1.2 において

$L'_1, L'_2 : M$ の実形、 $L'_1 \cap L'_2$

$L_1 \cong L'_1, L_2 \cong L'_2$

$\#(L_1 \cap L_2) = \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}$

$\Rightarrow L_1 \cap L_2 \cong L'_1 \cap L'_2$

次の定理 1.2 の結論より強い

$\#(L_1 \cap L_2) = \#(L'_1 \cap L'_2)$

対称 R 空間の対蹠集合の性質を適用

定理 1.4 (1) の場合に適用できる。

2. 証明の概要

補題 2.1

M : コンパクト Kähler 多様体、
正則断面曲率 > 0

L_1, L_2 : M の全測地的コンパクト
Lagrange 部分多様体

$\Rightarrow L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$

Frankel の定理と同様の証明法

補題 2.2

M : コンパクト対称空間

A : 極大トーラス、 $o \in A$

S : 基本胞体 $\bar{S} = \cup_i S_i$

A_1 : 極大トーラス、 $o \in A_1$

$A_1 \cap A \cap \text{Exp} S_i \neq \emptyset$

$\Rightarrow \text{Exp} S_i \subset A_1 \cap A$

実形の極大トーラス

補題 2.2

⇒

実形の極大トーラスの交叉

: 基本胞体の頂点

⇒ 定理 1.1

Chen-長野

M : コンパクト対称空間

$o \in M$ の点対称 s_o

$$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^r M_j^+$$

連結成分 M_j^+ : 極地

極地 : 全測地的部分多様体、
コンパクト対称空間

M : コンパクト型

Hermite 対称空間

$\Rightarrow$ 各極地 M^+ : 同上

L : M の実形

$L \cap M^+ \neq \emptyset$

$\Rightarrow L \cap M^+ : M^+$ の実形

M, L_1, L_2 : 定理 1.2, 1.3, 1.4

$$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^r M_j^+$$

$o \in L_1 \cap L_2$ としてよい

$$L_1 \cap L_2 \subset F(s_o, M)$$

$$L_1 \cap L_2 =$$

$$\bigcup_{j=0}^r \{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\}$$

極地による数学的帰納法