コンパクト対称空間の対蹠集合とその応用

田中　真紀子

（東京理科大学）

2011年1月27日

田崎博之氏（筑波大学）との共同研究

内容

1. Riemann対称空間の定義と例
2. コンパクトRiemann対称空間の対蹠集合と2-number
3. コンパクト型Hermite対称空間の実形の交叉
4. 対称R空間の対蹠集合

1．Riemann対称空間の定義と例

(M, g)：Riemann多様体

(M, g)：**Riemann対称空間**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall x \in M$, ${}^\exists s_x$: Mの等長変換　s.t.

(1) $s_x \circ s_x = \mathrm{id}_M$

(2) xはs_xの孤立不動点

s_x : xにおける**点対称**

例: Euclid空間, 球面, 双曲空間, 射影空間, トーラス, Grassmann多様体, コンパクトLie群など

M：単連結Riemann対称空間

$\Longrightarrow \quad M = M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_k$

M_0：ユークリッド空間

$M_i \ (1 \leq i \leq k)$：コンパクト型または非コンパクト型既約Riemann対称空間

既約Riemann対称空間

$\Longrightarrow$　点対称で不変なRiemann計量は定数倍を除いて一意的

2．コンパクトRiemann対称空間の対蹠集合と2-number

M：コンパクトRiemann対称空間

$S \subset M$：**対蹠集合** $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\forall x \in S$, $s_x(y) = y$ for ${}^\forall y \in S$

例：$M = S^n$ $(\subset \mathbb{R}^{n+1})$

$S = \{x, -x\}$は対蹠集合

$x \in M$

$F(s_x, M) = \{y \in M \mid s_x(y) = y\}$：$s_x$の不動点集合

$F(s_x, M)$の各連結成分をxに関する**極地**とよぶ。

例：$M = S^n$ $(\subset \mathbb{R}^{n+1})$

$F(s_x, M) = \{x\} \cup \{-x\}$

例： $M = U(n) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X^t\bar{X} = E\}$ ：ユニタリ群

E：単位行列,　　$s_E(X) = X^{-1} \quad (X \in U(n))$

$$F(s_E, M) = \{X \in U(n) \mid X^2 = E\}$$
$$= \{E\} \cup G_1(\mathbb{C}^n) \cup \cdots \cup G_{n-1}(\mathbb{C}^n) \cup \{-E\}$$

M：コンパクトRiemann対称空間

Mの**2-number**　　$\#_2 M \overset{\mathrm{def}}{=} \sup\{\#S \mid S$は$M$の対蹠集合$\}$

注意： $\#_2 M < \infty$

$\#S = \#_2 M$を満たす対蹠集合Sを**大対蹠集合**とよぶ。

問1： 任意の対蹠集合に対して、それを含む大対蹠集合が存在するか？

問2： 任意の２つの大対蹠集合は合同か？

例： $\#_2 S^n = 2$,　$\{x, -x\}$：大対蹠集合

$\#_2 \mathbb{R}P^n = n + 1$

$e_1, \ldots, e_{n+1}$：$\mathbb{R}^{n+1}$の正規直交基底

$\{\mathbb{R}e_1, \ldots, \mathbb{R}e_{n+1}\}$：大対蹠集合

$\#_2 U(n) = 2^n$

$\{\mathrm{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1)\}$：大対蹠集合

3．コンパクト型Hermite対称空間の実形の交叉

(M,g)：**Hermite多様体**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ M：複素多様体

g：Hermite計量

i.e. $g_x(J_x(X),J_x(Y)) = g_x(X,Y) \quad (X,Y \in T_xM)$

J：Mの概複素構造

(M,g)：Hermite多様体

(M,g)：**Hermite対称空間**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall x \in M,\ {}^\exists s_x$：$M$の正則等長変換 s.t.

(1) $s_x \circ s_x = \mathrm{id}_M$

(2) xはs_xの孤立不動点

注意：Hermite対称空間はKähler多様体

例：複素トーラス $\mathbb{C}^n/\Gamma$

複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$

複素Grassmann多様体 $G_r(\mathbb{C}^{n+r})$

複素2次超曲面

$Q_n(\mathbb{C}) = \{[z_1, \ldots, z_{n+2}] \in \mathbb{C}P^{n+1} \mid z_1^2 + \cdots + z_{n+2}^2 = 0\}$

（有向実Grassmann多様体$\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$に正則等長的）

M：Hermite対称空間

L：Mの**実形**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^\exists\sigma$：Mの対合的反正則等長変換　s.t.

$$L = \{x \in M \mid \sigma(x) = x\}$$

コンパクト型Hermite対称空間の実形はLeung, Takeuchiにより分類

注意１　実形は連結

注意２　実形は全測地的Lagrange部分多様体

例： $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$

$G_r(\mathbb{R}^{n+r}) \subset G_r(\mathbb{C}^{n+r})$

$G_r(\mathbb{H}^{n+r}) \subset G_{2r}(\mathbb{C}^{2(n+r)})$

$U(r) \subset G_r(\mathbb{C}^{2r})$

$(S^k \times S^{n-k})/\mathbb{Z}_2 \subset \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$

2 つの実形の交叉

$\mathbb{C}P^1 = S^2$ の実形は大円

2 つの大円の交叉は 2 点からなる対蹠集合

$\mathbb{C}P^n$ の実形は $\mathbb{R}P^n$ と合同

2 つの実形の交叉は $(n+1)$ 点からなる対蹠集合 (Howard)

L_1, L_2 : 横断的に交わる $\mathbb{C}P^n$ の実形

$\Longrightarrow \quad \exists e_1, \ldots, e_{n+1} : \mathbb{C}^{n+1}$ のユニタリ基底

s.t. $\quad L_1 \cap L_2 = \{\mathbb{C}e_1, \ldots, \mathbb{C}e_{n+1}\}$

特に, $\# L_1 \cap L_2 = \#_2 L_1 = \#_2 L_2$

定理 3.1

M：コンパクト型Hermite対称空間

L_1, L_2：横断的に交わるMの実形

$\Longrightarrow$ $L_1 \cap L_2$はL_1およびL_2の対蹠集合

定理 3.2

M：コンパクト型Hermite対称空間

L_1, L_2：横断的に交わるMの合同な実形

$\Longrightarrow$ $L_1 \cap L_2$はL_1およびL_2の大対蹠集合

特に $\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = \#_2 L_2$

定理 3.3

M：既約コンパクト型Hermite対称空間

L_1, L_2：横断的に交わるMの実形

$\Longrightarrow$

(1) $M = G_{2m}(\mathbb{C}^{4m})(m \geq 2)$で$L_1, L_2$がそれぞれ$G_m(\mathbb{H}^{2m})$,

$U(2m)$に合同なとき：

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 L_1 < 2^{2m} = \#_2 L_2$$

(2) (1)以外のとき：

$$\#(L_1 \cap L_2) = \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}$$

コンパクト型Hermite対称空間の実形 $\longleftrightarrow$ 対称 R 空間

定理（Takeuchi）

M：対称 R 空間 $\Longrightarrow$ $\#_2 M = \mathrm{dim} H_*(M, \mathbb{Z}_2)$

定義（Oh）

M：Hermite対称空間

L：M のLagrange部分多様体

L：**大域的タイト**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ L と gL が横断的に交わるような $^\forall g \in I_0(M)$ に対して

$$\#(L \cap gL) = \mathrm{dim} H_*(L, \mathbb{Z}_2)$$

定理 3.2 の系

コンパクト型Hermite対称空間の実形は大域的タイトである。

定理 3.1 の証明の概略

補題 3.4 (Tasaki)

M : 正の正則断面曲率をもつコンパクトKähler多様体

L_1, L_2 : M のコンパクト全測地的Lagrange部分多様体

$\Longrightarrow \quad L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$

$o \in L_1 \cap L_2$とする。このとき、$^\forall p \in L_1 \cap L_2 - \{o\}$に対して$o$と$p$が対蹠的、つまり、ある閉測地線の上で互いに対蹠点となることが次の補題からわかる。

補題 3.5

M：コンパクトRiemann対称空間

$o \in M$

A, A_1：Mの極大トーラス, $o \in A \cap A_1$

S：Aの基本包体, $\overline{S} = \cup_i S_i$

$A_1 \cap A \cap \mathrm{Exp}\ S_i \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \quad \mathrm{Exp}\ S_i \subset A_1 \cap A$

<u>定理 3.2 の証明の概略</u>

$o \in L_1 \cap L_2$

L_1, L_2：合同 $\Longrightarrow$ $\#_2 L_1 = \#_2 L_2$

$$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$$

M_j^+：コンパクト型Hermite対称空間

$$F(s_o, L_i) = \bigcup_{j=0}^{r} (L_i \cap M_j^+) \qquad (i = 1, 2)$$

$L_i \cap M_j^+$：M_j^+ の実形

$$L_1 \cap L_2 = \bigcup_{j=0}^{r} \{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\}$$

$$\#(L_1 \cap L_2) = \sum_{j=0}^{r} \#\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\}$$

したがって次の主張が成り立つ：

$$^\forall j, \quad \#\{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\} = \#_2(L_1 \cap M_j^+) = \#_2(L_2 \cap M_j^+)$$

$$\Longrightarrow \quad \#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = \#_2 L_2$$

極地に関する帰納法

4．対称 R 空間の対蹠集合

M：**対称 R 空間**

$\overset{\text{def}}{\iff}$

M：Riemann対称空間の線形イソトロピー軌道として実現される

Riemann対称空間

コンパクト型Hermite対称空間 $M = G/K$

$$\updownarrow$$

コンパクト半単純Lie環 $\mathfrak{g}$ の随伴軌道 $\mathrm{Ad}(G)J$

($\mathrm{ad}J$ の固有値は $0, \pm 1$)

$M = \mathrm{Ad}(G)J\ (\subset \mathfrak{g})$：コンパクト型Hermite対称空間

$$s_X(Y) = Y \iff [X, Y] = 0 \quad (X, Y \in M)$$

定理 4.1

$M = \mathrm{Ad}(G)J$：コンパクト型Hermite対称空間

$\Longrightarrow$

${}^{\forall}S : M$の大対蹠集合, ${}^{\exists}\mathfrak{t} : \mathfrak{g}$の極大可換Lie部分環 s.t. $S = M \cap \mathfrak{t}$

特に、大対蹠集合は$\mathfrak{g}$のWeyl群の軌道である。

また、次の(A),(B)が成立する。

(A) 任意の対蹠集合に対してそれを含む大対蹠集合が存在

(B) 2つの大対蹠集合は合同

定理 4.2

$M=\mathrm{Ad}(G)J$：コンパクト型Hermite対称空間

τ：Mの対合的反正則等長変換

$L=F(\tau,M)$：Mの実形，$J\in L$

$I_\tau:G\to G$，$I_\tau(g)=\tau g\tau^{-1}$：$G$の対合的自己同型

$\mathfrak{g}=\mathfrak{l}+\mathfrak{p}$：$I_\tau$から定まる標準分解

$\Longrightarrow$

$L=M\cap\mathfrak{p}$

${}^\forall S$：Lの大対蹠集合，${}^\exists\mathfrak{a}$：$\mathfrak{p}$の極大可換部分空間 s.t. $S=M\cap\mathfrak{a}$

特に、大対蹠集合はI_τから定まる対称対のWeyl群の軌道である。

また、次の(A),(B)が成立する。

(A) 任意の対蹠集合に対してそれを含む大対蹠集合が存在

(B) 2つの大対蹠集合は合同

系 4.3

対称 R 空間の対蹠集合について(A),(B)が成立する。

注意: $SU(4)/\mathbb{Z}_4$ には大対蹠集合ではない極大対蹠集合が存在する。したがって(A)は成立しない。