有向実Grassmann多様体の極大対蹠集合

研究集会「対称空間論とその周辺」

田崎博之

筑波大学数理物質系

2017年9月9日

1　対蹠集合

定義 (Chen-長野)

M : コンパクト Riemann 対称空間

s_x : $x \in M$ における点対称

$x, y \in M$: 対蹠的 $\Leftrightarrow s_x(y) = y$

$S \subset M$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \; x, y$: 対蹠的

S : 大対蹠集合 $\Leftrightarrow |S|$: 最大値

2　有向実 Grassmann 多様体

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$

　: $\mathbb{R}^n$ 内の k 次元有向部分空間全体

$SO(n)$ 不変 Riemann 計量により

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$: Riemann 対称空間

正の向きの正規直交基底の外積を対応

$$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n) \subset \bigwedge^k \mathbb{R}^n$$

$\boldsymbol{X}$：集合

$\binom{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{k}} = \{\boldsymbol{\alpha} \subset \boldsymbol{X} \mid |\boldsymbol{\alpha}| = \boldsymbol{k}\}$

$[\boldsymbol{n}] = \{\mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{n}\}$

$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}}$ に対して

$\boldsymbol{\alpha} \backslash \boldsymbol{\beta} = \{\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{i} \notin \boldsymbol{\beta}\}$

$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$：対蹠的 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{\alpha} \backslash \boldsymbol{\beta}|$：偶数

$\boldsymbol{A} \subset \binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}}$：対蹠集合

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$：対蹠的 $(\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{A})$

定理 $\mathbf{1(T.2013)}$

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合の分類

$\leftrightarrow \binom{[n]}{k}$ の極大対蹠的部分集合の分類

(正規直交基底の元の選び方)

$e_1, \ldots, e_n$: $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底

A : $\binom{[n]}{k}$ の極大対蹠的部分集合

$\Rightarrow \{\pm\langle e_{\alpha(1)}, \ldots, e_{\alpha(k)}\rangle_{\mathbb{R}} \mid \alpha \in A\}$

: $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合

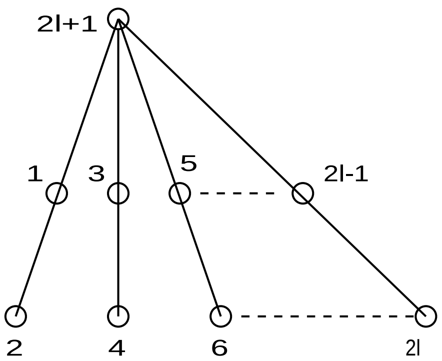
逆の対応も定まる

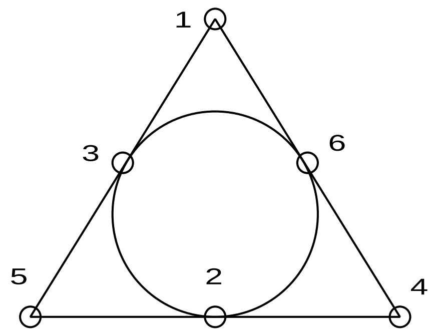
$\mathbf{MAS}$：極大対蹠的部分集合

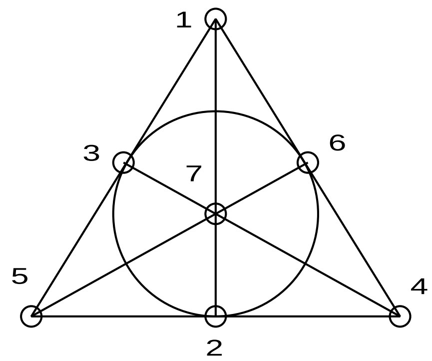
定理 $\mathbf{2(T.2013)}$　$\boldsymbol{k} \le \mathbf{4}$ のとき、

$\binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}}$ の $\mathbf{MAS}$ の分類完成

$\boldsymbol{k} = \mathbf{3}$ の場合







$\binom{[n]}{k}$ $(k \leq 4)$ の MAS の分類に現れる
MAS

$\downarrow$ 一般化

$k > 4$ のときの $\binom{[n]}{k}$ の MAS

：分類または性質を調べる

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{A(2,2l)}\\
&=\{\{1,2\},\dots,\{2l-1,2l\}\}\subset\binom{[2l]}{2}\\
&\boldsymbol{A(2k,2l)}\\
&=\left\{\alpha_1\cup\cdots\cup\alpha_k\,\middle|\,\begin{matrix}\alpha_i\in A(2,2l)\\ \alpha_i\neq\alpha_j\end{matrix}\right\}\subset\binom{[2l]}{2k}\\
&\boldsymbol{A(2k+1,2l+1)}\\
&=\{\alpha\cup\{2l+1\}\mid\alpha\in A(2k,2l)\}\subset\binom{[2l+1]}{2k+1}
\end{aligned}
$$

定理 3(T.2014)

$\boldsymbol{A(2k,2l), A(2k+1,2l+1)}$: AS

$\boldsymbol{l \geq 3k+1}$ のとき

$\boldsymbol{A(2k,2l)}$: MAS in $\boldsymbol{\binom{[2l]}{2k}, \binom{[2l+1]}{2k}}$

$\boldsymbol{A(2k+1,2l+1)}$

: MAS in $\boldsymbol{\binom{[2l+1]}{2k+1}, \binom{[2l+2]}{2k+1}}$

$$\boldsymbol{a(k,n) = \max\left\{|A| \;\middle|\; A:\ \textbf{AS in } \binom{[n]}{k}\right\}}$$

$$\boldsymbol{a(1,n) = 1 \qquad a(2,n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$$

$$\boldsymbol{\begin{aligned} a(2k,n) &\geq \left| A\left(2k, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)\right| = \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{k}, \\ a(2k+1,n) &\geq \left| A\left(2k+1, 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right)\right| \\ &= \binom{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}{k}. \end{aligned}}$$

$\boldsymbol{k \leq 4}$の場合の分類結果より

$$\boldsymbol{a(1,n) = 1, \quad a(2,n) = \lfloor n/2 \rfloor}$$

$\boldsymbol{n}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{7, \ldots, 16}$	$\mathbf{17}$以上
$\boldsymbol{a(3,n)}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{7}$	$\boldsymbol{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$

$\boldsymbol{n}$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{7}$	$\mathbf{8, \ldots, 11}$	$\mathbf{12}$以上
$\boldsymbol{a(4,n)}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{7}$	$\mathbf{14}$	$\boldsymbol{\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2}}$

定理 $\mathbf{4(T.2015)}$

$\boldsymbol{n \geq 87 \Rightarrow a(5, n) = \binom{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}{2}}$

$\boldsymbol{A \subset \binom{[n]}{5}}$: 対蹠的、$\boldsymbol{|A| = \binom{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}{2}}$

$$\boldsymbol{\Rightarrow A : A\left(5, 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right)}$$ と合同

次が成り立つことが期待される

$\boldsymbol{k}$ に対して $\boldsymbol{n}$ が十分大きい $\Rightarrow$

$\boldsymbol{\binom{[n]}{k}}$ の大対蹠集合は $\boldsymbol{A(2k', 2n')}$ または

$\boldsymbol{A(2k'+1, 2n'+1)}$ に合同

定理5(Frankl-徳重 2016)

$\boldsymbol{k}$: 自然数、$\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{k}$ に対して十分大きいとき、

$$\binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}} \text{の大対蹠集合} : \boldsymbol{A(k,l)} \text{に合同}$$

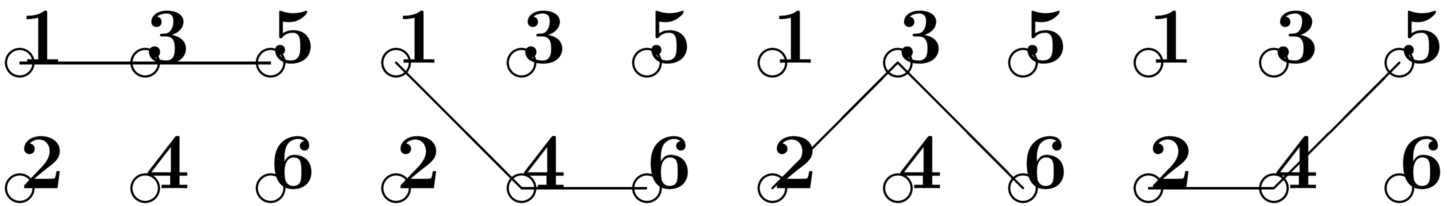
ただし、$\boldsymbol{k}$ が奇数のとき $\boldsymbol{l}$ は $\boldsymbol{n}$ 以下の最大奇数であり、$\boldsymbol{k}$ が偶数のとき $\boldsymbol{l}$ は $\boldsymbol{n}$ 以下の最大偶数である。

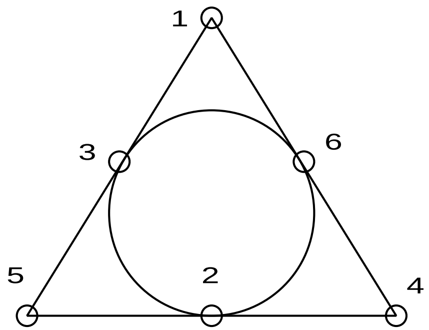
$\boldsymbol{k}$ に対して $\boldsymbol{n}$ があまり大きくない $\binom{[n]}{k}$ を考える

$\boldsymbol{Ev_{2m} = \{\{\alpha(1), \ldots, \alpha(m)\} \mid}$

$\quad \boldsymbol{\alpha(i) \in \{2i-1, 2i\}}$, 偶数の $\boldsymbol{\alpha(i)}$ は偶数個 $\boldsymbol{\}}$

とおくと $\boldsymbol{Ev_{2m} \subset \binom{[2m]}{m}}$.





定理 $\mathbf{6(T.2014)}$

$\mathbf{(1)}$ $\boldsymbol{2m \equiv 2, 4, 6(\mathrm{mod}8)}$ のとき、

$\boldsymbol{Ev_{2m} : \binom{[2m]}{m}}$ の $\mathbf{MAS}$

$\mathbf{(2)}$ $\boldsymbol{Ev_{8m} : \binom{[8m]}{4m}}$ の $\mathbf{MAS}$ ではない

$\boldsymbol{Ev_{8m} \cup A(4m, 8m) : \binom{[8m]}{4m}}$ の

$\mathbf{MAS}$

前ページの定理の $(\mathbf{2})$ の $\mathbf{MAS}$ を参考に

対蹠集合を定める準備

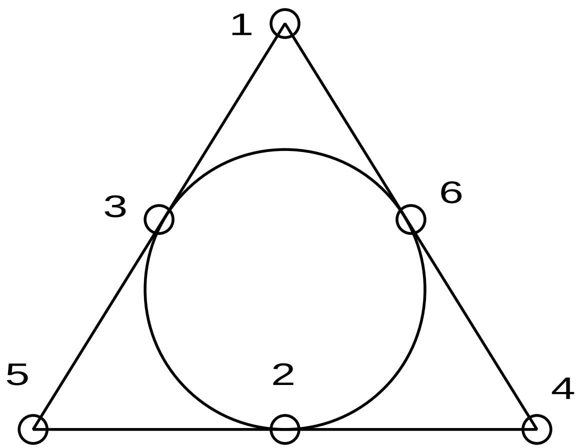
$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$: 集合 $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y} = \emptyset$

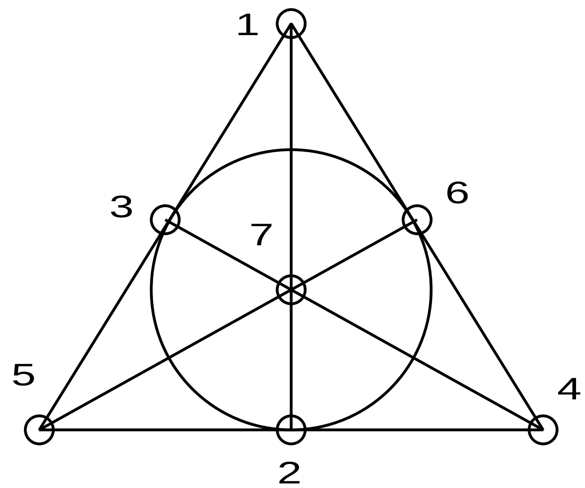
$\boldsymbol{A} \subset \binom{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{k}}$, $\boldsymbol{B} \subset \binom{\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{l}}$ に対して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \{\boldsymbol{\alpha} \cup \boldsymbol{\beta} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{B}\} \\ &\subset \binom{\boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{k} + \boldsymbol{l}} \end{aligned}$$

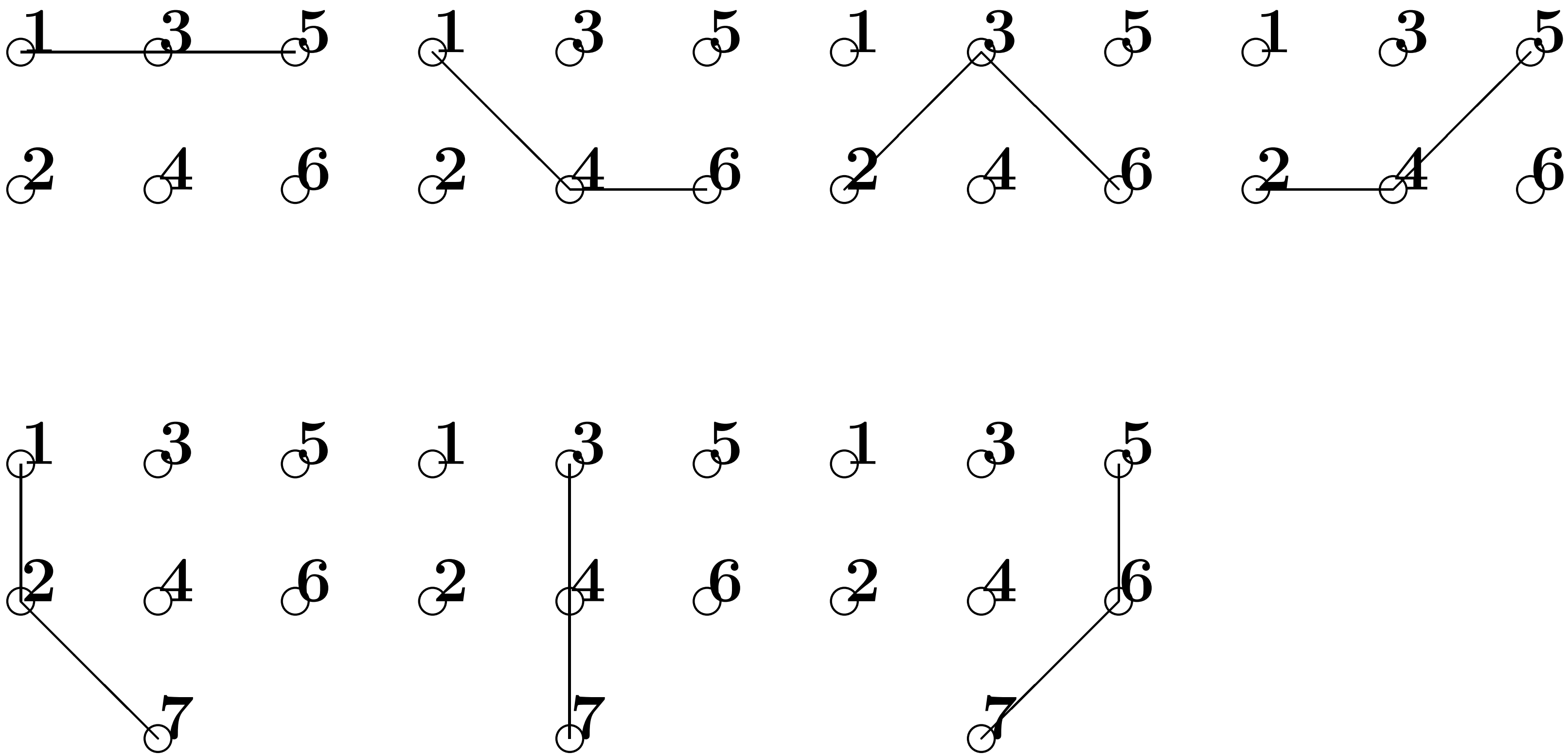
$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{Ev^+_{8m} = Ev_{8m} \cup A(4m, 8m),}\\
&\boldsymbol{Ev^+_{8m+2} = Ev_{8m+2} \cup}\\
&\quad \boldsymbol{A(4m-2, 8m+2) \times \{\{8m+3, 8m+4, 8m+5\}\},}\\
&\boldsymbol{Ev^+_{8m+4} = Ev_{8m+4} \cup}\\
&\quad \boldsymbol{A(4m, 8m+4) \times \{\{8m+5, 8m+6\}\},}\\
&\boldsymbol{Ev^+_{8m+6} = Ev_{8m+6} \cup A(4m+2, 8m+6) \times \{\{8m+7\}\}.}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{Ev_6}$ と $\boldsymbol{Ev_6^+}$





これらは $\binom{[\mathbf{6}]}{\mathbf{3}}$ と $\binom{[\mathbf{7}]}{\mathbf{3}}$ 内の $\mathbf{MAS}$ の分類に現れる。



定理 7(T.)　以下は $\binom{[n]}{k}$ の MAS である。

$k \backslash n$	$8m$	$8m+1$	$8m+2$	$8m+3$
$4m$	Ev^{+}_{8m}	Ev^{+}_{8m}	Ev^{+}_{8m}	Ev^{+}_{8m}
$4m+1$			Ev_{8m+2}	Ev_{8m+2}

$k \backslash n$	$8m+4$	$8m+5$	$8m+6$	$8m+7$
$4m+1$	Ev_{8m+2}	Ev^{+}_{8m+2}		
$4m+2$	Ev_{8m+4}	Ev_{8m+4}	Ev^{+}_{8m+4}	
$4m+3$			Ev_{8m+6}	Ev^{+}_{8m+6}