コンパクト型Riemann対称空間の極大対蹠集合

田中 真紀子（東京理科大学）

研究集会「対称空間とその周辺」
〜田崎博之先生の還暦を記念して〜
2017年9月9日–10日
つくばイノベーションプラザ

田崎博之先生との共同研究

1. **Introduction**
2. 古典型コンパクト**Lie**群の商群の極大対蹠部分群
3. 基本方針
4. $CI(n)$及び$CI(n)^*$の極大対蹠集合
5. $G_m(\mathbb{K}^n)$及び$G_m(\mathbb{K}^{2m})^*$の極大対蹠集合
6. $DIII(n)$及び$DIII(n)^*$の極大対蹠集合

1. Introduction

M: コンパクトRiemann対称空間

s_x: xにおける点対称

i.e., (i) s_x はMの等長変換, (ii) ${s_x}^2 = \mathrm{id}$, (iii) x はs_xの孤立不動点

$S \subset M$: 部分集合

S: 対蹠集合 $\overset{\text{def}}{\iff} \forall x, y \in S,\ s_x(y) = y$

Mの2-number $\#_2 M$

$\#_2 M := \max\{|S| \mid S \subset M$ 対蹠集合$\}$

S: 大対蹠集合 $\overset{\text{def}}{\iff} |S| = \#_2 M$

(Chen-Nagano 1988)

例 **(1)** $M = S^n \, (\subset \mathbb{R}^{n+1})$

$x \in S^n$ に対して $\{x, -x\}$ は大対蹠集合，$\#_2 S^n = 2$

(2) $M = \mathbb{R}P^n$

$e_1, \ldots, e_{n+1}$： $\mathbb{R}^{n+1}$ の正規直交基底

$\{\langle e_1 \rangle_{\mathbb{R}}, \ldots, \langle e_{n+1} \rangle_{\mathbb{R}}\}$： 大対蹠集合，$\#_2 \mathbb{R}P^n = n+1$

(3) $M = U(n) \qquad s_x(y) = xy^{-1}x$

$s_{1_n}(y) = y \;\Leftrightarrow y^2 = 1_n$ **(**1_n**： 単位行列)**

$x^2 = y^2 = 1_n \;\Rightarrow\; s_x(y) = y$ **iff** $xy = yx$

$$\left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\}$$ ： 大対蹠集合，$\#_2 U(n) = 2^n$

注意: 一般に極大対蹠集合は大対蹠集合とは限らない

(田崎-T. 2013) 対称R空間Mに対して次が成立

(i) Mの任意の対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる

(ii) Mの任意の二つの大対蹠集合は$I_0(M)$合同

(iii) Mの大対蹠集合は然るべき**Weyl group**の軌道

注意: $S^n, \mathbb{R}P^n, U(n)$は対称R空間

対称R空間Lは、あるコンパクト型**Hermite**対称空間

Mの実形

i.e., $\exists\tau$**:** Mの対合的反正則等長変換　**s.t.**

$L = F(\tau, M) := \{x \in M \mid \tau(x) = x\}$ **(**連結**)**

(田崎**-T. 2012)**

M**:** コンパクト型**Hermite**対称空間

L_1, L_2**:** Mの実形**,** $L_1 \pitchfork L_2$

$\Rightarrow$ $L_1 \cap L_2$はL_i $(i = 1, 2)$の対蹠集合

さらに**,** L_1, L_2が合同ならば$L_1 \cap L_2$は大対蹠集合

Chen-Nagano は殆ど全てのコンパクト**Riemann**対称空間について$\#_2 M$を決定
証明では、一部、対蹠集合の構造を解析してはいるが、対蹠集合の元の個数の評価が主

目標 : コンパクト**Riemann**対称空間（特に、対称**R**空間ではない場合) の極大対蹠集合の分類

対称**R**空間ではない場合の例: 有向実**Grassmann**多様体$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n), k \geq 3$ ($k = 3, 4$の場合は田崎), $Spin(n)$, $n \geq 7$, 古典型コンパクト**Lie**群Gの商群G/Γ (Gが古典型の場合は田崎-**T.**), 例外型コンパクト**Lie**群 (G_2の場合は田崎-保倉-**T.**) など

2. 古典型コンパクトLie群の商群の極大対蹠部分群

G: 両側不変計量をもつコンパクトLie群

$x \in G,\ s_x(y) = xy^{-1}x \quad (y \in G)$

e : Gの単位元

$s_e(y) = y \Leftrightarrow y^2 = e$

$x^2 = y^2 = e$のとき、$s_x(y) = y \Leftrightarrow xy = yx$

$e \in S \subset G$: 極大対蹠集合 $\Rightarrow$ Sは部分群

$S \cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{r} \qquad |S| = 2^r$

$r \geq \mathrm{rank}(G)$ ($r > \mathrm{rank}(G)$ も起こり得る)

$$\Delta_n := \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n)$$

$$\Delta_n^{\pm} := \{ g \in \Delta_n \mid \det g = \pm 1 \}$$

$O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$ の極大対蹠部分群 **(MAS)** は Δ_n に共役であり、$SO(n)$, $SU(n)$ の **MAS** は Δ_n^{+} に共役

$$\#_2 O(n) = \#_2 U(n) = \#_2 Sp(n) = 2^n$$
$$\#_2 SO(n) = \#_2 SU(n) = 2^{n-1}$$

$$D[4] := \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ (二面体群)}$$

$n = 2^k \cdot l,\ \ l$は奇数

$0 \leq s \leq k$なるsに対して

$$\begin{aligned} D(s,n) &:= \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{s} \otimes \Delta_{n/2^s} \subset O(n) \\ &= \{ d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \\ &\qquad\qquad \mid d_1, \ldots, d_s \in D[4], d_0 \in \Delta_{n/2^s} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q[8] &:= \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\} \\ &\quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \\ &\quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k},\ \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i},\ \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \end{aligned}$$

定理 1（田崎-T. 2017）

$\tilde{G} = U(n)$, $O(n)$, $Sp(n)$

$G = U(n)/\{\pm 1_n\}$, $O(n)/\{\pm 1_n\}$, $Sp(n)/\{\pm 1_n\}$

$\pi_n : \tilde{G} \to G$ ： 自然な射影

(I) $G = O(n)/\{\pm 1_n\}$ の**MAS**は次の何れかに共役

$$\pi_n(D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除く

(II) $G = U(n)/\{\pm 1_n\}$ の**MAS**は次の何れかに共役

$$\pi_n(\{1, \sqrt{-1}\}D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除く

(III) $G = Sp(n)/\{\pm 1_n\}$ の**MAS**は次の何れかに共役

$$\pi_n(Q[8]\cdot D(s,n)) \qquad (0 \le s \le k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除く

注意: $\Delta_2 \subsetneq D[4]$ より

$$D(k-1,2^k) = \underbrace{D[4]\otimes\cdots\otimes D[4]}_{s} \otimes \Delta_2$$
$$\subsetneq \underbrace{D[4]\otimes\cdots\otimes D[4]}_{s} \otimes D[4] = D(k,2^k)$$

Griess (1991), Yu (2013) は代数群の基本アーベル p 部分群の共役類を代数的な手法で分類した。対蹠部分群は基本アーベル**2**部分群に他ならない。

3. 基本方針

定理1を利用して、コンパクト型Riemann対称空間の極大対蹠部分集合を分類するための基本方針を述べる。

G: コンパクトLie群　e: 単位元

M: $F(s_e, G) = \{g \in G \mid s_e(g) = g\}$の正次元の連結成分の一つ （$M$は$G$の$e$に関する極地）

$x \in M$に対して$s_x|_M$がMの点対称になりMはRiemann対称空間

$$M = \bigcup_{g \in G} I_g(x)$$

ここで、I_gはgが定めるGの内部自己同型写像

$$I_0(M) = \{I_g|_M \mid g \in G\}$$

$A \subset M$を極大対蹠集合とする

$A \cup \{e\}$はGの対蹠集合

$\tilde{A}$: $A \cup \{e\}$を含むGの極大対蹠部分群

$A = M \cap \tilde{A}$

$B_0, B_1, \ldots, B_k$: Gの極大対蹠部部群の各共役類の代表

$0 \leq \exists s \leq k,\ \exists g \in G \quad$ **s.t.** $\tilde{A} = I_g(B_s)$

$A = M \cap I_g(B_s) = I_g(M \cap B_s)$

AはM内で$M \cap B_s$と$I_0(M)$合同

Mの極大対蹠集合の$I_0(M)$合同類の代表の候補は

$$M \cap B_0, M \cap B_1, \ldots, M \cap B_k$$

4. $CI(n)$及び$CI(n)^*$の極大対蹠集合

$$CI(n) := \{x \in Sp(n) \mid x^2 = -1_n\} \cong Sp(n)/U(n)$$

コンパクト型**Hermite**対称空間

$\mathrm{i}\Delta_n \subset CI(n)$は$Sp(n)$の極大対蹠集合、したがって、

$CI(n)$の極大対蹠集合（合同を除いて唯一）

$$Sp(n)^* := Sp(n)/\{\pm 1_n\}, \ \ e := \pi_n(1_n)$$

-1_nによる積は$CI(n)$を保つ

$$CI(n)^* := \pi_n(CI(n)) = CI(n)/\{\pm 1_n\}$$

$CI(n)^* \subset Sp(n)^*$はeに関する極地

$\pi_n : Sp(n) \to Sp(n)^*$ 自然な射影

$$
\begin{aligned}
&CI(n)^* \cap \pi_n(Q[8] \cdot D(s,n)) \\
&= \pi_n(CI(n) \cap Q[8] \cdot D(s,n)) \\
&= \pi_n(\{g \in Q[8] \cdot D(s,n) \mid g^2 = -1_n\}) \\
&= \pi_n(ND(s,n) \cup \{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}PD(s,n))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PD(s,n) &:= \{d \in D(s,n) \mid d^2 = 1_n\} \\
ND(s,n) &:= \{d \in D(s,n) \mid d^2 = -1_n\}
\end{aligned}
$$

<u>定理 2</u> **(田崎-Yu-T.)** $CI(n)^*$の**MAS**は次の何れかに合同

$$\pi_n(ND(s,n) \cup \{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}PD(s,n)) \quad (0 \le s \le k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$の場合は除く

5. $G_m(\mathbb{K}^n)$ 及び $G_m(\mathbb{K}^{2m})^*$ の極大対蹠集合

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

$$O(n, \mathbb{K}) := \begin{cases} O(n) & (\mathbb{K} = \mathbb{R}) \\ U(n) & (\mathbb{K} = \mathbb{C}) \\ Sp(n) & (\mathbb{K} = \mathbb{H}) \end{cases}$$

$G_m(\mathbb{K}^n)$**:** $\mathbb{K}^n$ 内の m 次元 $\mathbb{K}$ 部分空間からなる **Grassmann** 多様体 **(**$2m \leq n$**)** （これらは対称 R 空間）

$$G_m(\mathbb{K}^n) = O(n, \mathbb{K})/O(m, \mathbb{K}) \times O(n-m, \mathbb{K})$$

埋め込み $G_m(\mathbb{K}^n) \ni x \mapsto 1_x - 1_{x^\perp} \in O(n, \mathbb{K})$ の像 M は

$$F(s_e, O(n,\mathbb{K})) = \bigcup_{0\le k\le n} \bigcup_{g\in O(n,\mathbb{K})} g \begin{bmatrix} 1_k & \\ & -1_{n-k} \end{bmatrix} g^{-1}$$

の連結成分 $(k=m)$ に一致し e に関する極地

$O(n,\mathbb{K})$ の極大対蹠部分群は Δ_n に共役

$$\begin{aligned} &M \cap \Delta_n \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{bmatrix} \in \Delta_n \;\middle|\; \begin{matrix} |\{i \mid \varepsilon_i = 1\}| = m \\ |\{j \mid \varepsilon_j = -1\}| = n-m \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

以下では、$n = 2m$の場合を考える。

$\gamma : G_m(\mathbb{K}^{2m}) \to G_m(\mathbb{K}^{2m}),\ \ \gamma(x) = x^{\perp}$

$G_m(\mathbb{K}^{2m})^* := G_m(\mathbb{K}^{2m})/\{\mathbf{id}, \gamma\}$

$G_m(\mathbb{K}^{2m})^* \subset O(2m, \mathbb{K})^* := O(2m, \mathbb{K})/\{\pm 1_{2m}\}$は

eに関する極地

$\pi_{2m} : O(2m, \mathbb{K}) \to O(2m, \mathbb{K})^*$ 自然な射影

$2m = 2^k \cdot l,\ \ l$は奇数

以下では、**MAS**は極大対蹠集合を表す。

定理 3 (田崎-**Yu**-**T.**) **(I)** $G_m(\mathbb{R}^{2m})^*$の**MAS**は次の何れかに合同

$$\pi_{2m}(\{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \in PD(s,2m) \mid \exists d_i (0 \le i \le s)\ \mathbf{Tr} d_i = 0\}) \quad (0 \le s \le k)$$

だたし、$(s,2m) = (k-1, 2^k)$の場合は除く

(II) $G_m(\mathbb{C}^{2m})^*$の**MAS**は次の何れかに合同

$$\pi_{2m}(\{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \in PD(s,2m) \mid \exists d_i (0 \le i \le s)\ \mathbf{Tr} d_i = 0\} \cup \sqrt{-1} ND(s,2m)) \quad (0 \le s \le k)$$

ただし、$(s,2m) = (k-1, 2^k)$の場合は除く

(III) $G_m(\mathbb{H}^{2m})^*$ の**MAS**は次の何れかに合同

$$\pi_{2m}(\{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \in PD(s,2m) \mid$$
$$\exists d_i (0 \le i \le s)\ \mathbf{Tr} d_i = 0\} \cup \{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\} ND(s,2m))$$
$$(0 \le s \le k)$$

ただし、$(s, 2m) = (k-1, 2^k)$ の場合は除く

6. $DIII(n)$ 及び $DIII(n)^*$ の極大対蹠集合

$C := \{g \in SO(2n) \mid g^2 = -1_{2n}\}$

$SO(2n)$ の $1_{2n}, -1_{2n}$ に関する中心体

$$C = \bigcup_{g \in SO(2n)} g \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_1 \end{bmatrix} g^{-1}$$

$$\cup \bigcup_{g \in SO(2n)} g \begin{bmatrix} -J_1 & & & \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_1 \end{bmatrix} g^{-1}$$

$$J_1 := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$DIII(n) := \bigcup_{g \in SO(2n)} g \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_1 \end{bmatrix} g^{-1}$$

$$\cong SO(2n)/U(n)$$

α**: diag**$(-1, 1, \ldots, 1) \in O(2n)$による共役

$$C = DIII(n) \cup \alpha(DIII(n))$$

$$\Gamma_n := \left\{ \begin{bmatrix} \epsilon_1 J_1 & & & \\ & \epsilon_2 J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \epsilon_n J_1 \end{bmatrix} \middle| \epsilon_i = \pm 1, \epsilon_1 \cdots \epsilon_n = 1 \right\}$$

$\Gamma_n \subset DIII(n)$は$SO(2n)$の対蹠集合

$\#_2 DIII(n) = 2^{n-1} = |\Gamma_n|$より$\Gamma_n$は$DIII(n)$の極大対蹠集合（合同を除いて唯一）

$SO(2n)^* = SO(2n)/\{\pm 1_{2n}\}$

$\pi_{2n} : SO(2n) \to SO(2n)^*$ 自然な射影

$\underline{n\text{が奇数の場合}}$

-1_{2n}による積で$DIII(n)$と$\alpha(DIII(n))$は写り合う

$\pi_{2n}(DIII(n)) \cong DIII(n)$

$\underline{n\text{が偶数の場合}}$

-1_{2n}による積は$DIII(n), \alpha(DIII(n))$を各々保つ

$\pi_{2n}(DIII(n)) = DIII(n)/\{\pm 1_{2n}\}$

$DIII(n)^* := DIII(n)/\{\pm 1_{2n}\}$は$SO(2n)^*$の$e$に関する極地

$CI(n)$のときと異なり中心体が連結でないため、$SO(2n)^*$の極大対蹠部分群の分類結果を用いて$DIII(n)^*$の**MAS**を求める際に、$DIII(n)$の元と$\alpha(DIII(n))$の元を区別する指標が必要になるが、**Pfaffian**が利用できる。

$DIII(2)^* \cong \mathbb{R}P^2$
$DIII(4)^* \cong G_2(\mathbb{R}^8)$
nが6以上の偶数の場合を考える。

定理 4 **(田崎-Yu-T.)** **(1)** $DIII(6)^*$ の**MAS**は次の何れかに合同

$$\{\pi_{12}(J_1 \otimes d) \mid d \in \Delta_6^-\},$$

$$\{\pi_{12}(J_1 \otimes d_1 \otimes d_0) \mid d_1 \in \{I_1, K_1\}, d_0 \in \Delta_3\}$$

$$\cup\{\pi_{12}(1_2 \otimes J_1 \otimes d_0) \mid d_0 \in \Delta_3\}$$

ここで、$I_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(2) $DIII(8)^*$ の**MAS**は次の何れかに合同

$$\{\pi_{16}(J_1 \otimes d) \mid d \in \Delta_8^+\},$$

$$\pi_{16}(ND(2,16)),$$

$$\pi_{16}(ND(4,16))$$

(3) $n = 4m+2\,(m \geq 2)$のとき、$DIII(n)^*$の**MAS**は次の何れかに合同

$$\{\pi_{2n}(J_1 \otimes d) \mid d \in \Delta_n^-\}$$

$$\{\pi_{2n}(J_1 \otimes d_1 \otimes d_0) \mid d_1 \in \{I_1, K_1\}, d_0 \in \Delta_{2m+1}\}$$
$$\cup\{\pi_{2n}(1_2 \otimes J_1 \otimes d_0) \mid d_0 \in \Delta_{2m+1}\}$$

(4) $n = 4m\,(m \geq 3)$のとき、$DIII(n)^*$の**MAS**は次の何れかに合同

$$\{\pi_{2n}(J_1 \otimes d) \mid d \in \Delta_n^+\},$$

$$\pi_{2n}(ND(s, 2n)) \;\; (2 \leq s \leq k),$$

ただし、$(s, 2n) = (k-1, 2^k)$の場合は除く