# 例外型コンパクトLie群$G_2$の極大対蹠部分群

田中 真紀子(東京理科大学理工学部)

田崎 博之(筑波大学数理物質系)

保倉 理美(福井大学学術研究院工学系部門)

# 1　極大対蹠集合

<u>設定</u> $M$: コンパクトRiemann対称空間,
$I(M)_0$: 等長変換群 $I(M)$ の単位元連結成分,
$s_x$: $M$ の点 $x$ での点対称,
$B \subseteq M$: $B$ は $M$ の部分集合.

<u>定義</u> (1) $B$: 対蹠集合 $\Leftrightarrow s_x y = y \ (x, y \in B)$.
(2) $B$: 極大対蹠集合 $\Leftrightarrow B'$: 対蹠集合, かつ,
　$B \subseteq B' \subseteq M$ ならば, $B = B'$.
(3) $M$ の２つの対蹠集合 $B, B'$:合同 $\Leftrightarrow$
　$\alpha B = B'$ となる $\alpha \in I(M)_0$ が在る.

# 2　点対称の不動点集合

<u>記号</u> $F(s_x, M) := \{y \in M \mid s_x y = y\}$.

$F(s_x, M) = \{x\} \cup \{o_1, \ldots, o_a\} \cup (\cup_{j=1}^{b} M_j^+)$: 互いに素な, $(1+a)$個の$0$次元連結成分$\{x\}$, $\{o_i\}$ $(1 \leq i \leq a)$, 及び, $b$個の$1$次元以上連結成分$M_j^+$ $(1 \leq j \leq b)$ の和集合.

<u>補題</u> $M$: 連結, $a = 0, b = 1$ならば, 対応 $B \mapsto B' := \{x\} \cup B$ は, $M_1^+$の極大対蹠集合の合同類全体の集合から$M$の極大対蹠集合の合同類全体の集合への全射を導く.

## 3　極大対蹠部分群

設定 $M$: コンパクト$\mathrm{Lie}$群のとき, $M$ は, 両側不変計量でRiemann対称空間になる．この時, $M$ の$2$つの共役な部分群は合同である.

$e:M$ の単位元とおく.

補題 もし, $M$ の極大対蹠集合 $B$ が $e$ を含めば, $B$ は可換部分群になり, $\boldsymbol{Z}_2$ のいくつかの直積に同型になる.

# 4　連結コンパクト単純Lie群 $G_2$

命題 (Nagano, *Tokyo J.Math.* **11**(1988))
$F(s_e, G_2) = \{e\} \cup M_1^+, M_1^+ \cong G_2/SO(4)$;
$o \in M_1^+$, $F(s_o, M_1^+) = \{o\} \cup M_{1,1}^+$,

$$M_{1,1}^+ \cong (S^2 \times S^2)/\boldsymbol{Z}_2.$$

定理 (田中-田崎-Y.) $(S^2 \times S^2)/\boldsymbol{Z}_2 \supseteq A := \{[e_i, \pm f_i] \mid i = 1, 2, 3\}$ に対応して在る $M_{1,1}^+$ の極大対蹠集合 $B$ について,

(1) $M_1^+$ の極大対蹠集合は $\{o\} \cup B$ に合同.

(2) $G_2$ の極大対蹠部分群は $\{e, o\} \cup B$ に共役.

# 5　$G_2$の具体的実現

記号 $\boldsymbol{H} := \boldsymbol{R}1 \oplus \boldsymbol{R}\boldsymbol{i} \oplus \boldsymbol{R}\boldsymbol{j} \oplus \boldsymbol{R}\boldsymbol{k}$: 四元数,
$\boldsymbol{O} := \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}$: Cayley-Dickson division$\boldsymbol{R}$代数;

$$xy = (m, a)(n, b) := (mn - \bar{b}a, a\overline{n} + bm),$$
$$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{O}) := \{\alpha \in GL_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{O}) \mid \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y)\}.$$

命題 $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{O}) = G_2$.

記号 $Sp(1) := \{q \in \boldsymbol{H} \mid |q| = 1\}$,

$$\psi : Sp(1) \times Sp(1) \longrightarrow GL_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{O});$$

$$\psi(p, q)(m, a) := (qm\overline{q}, pa\overline{q}),$$

$$e = \psi(1, 1), \gamma := \psi(1, -1),$$

$$G_2^\gamma := \{\alpha \in G_2 \mid \alpha\gamma = \gamma\alpha\}.$$

<u>命題</u>(Yokota (1977))
(1) $\psi(Sp(1) \times Sp(1)) = G_2^\gamma$,
(2) $\mathrm{ker}\psi = \{\pm(1, 1)\}$, $G_2^\gamma \cong SO(4)$.

# 6　極大対蹠部分群の実現

定理 (田中-田崎-Y.)

(1) $F(s_e, G_2) = \{e\} \cup M_1^+$,

$$M_1^+ = \{g\gamma g^{-1} \mid g \in G_2\} \cong G_2/SO(4).$$

(2) $o := \gamma \in M_1^+, F(s_o, M_1^+) = \{o\} \cup M_{1,1}^+$,

$$M_{1,1}^+ = \{\psi(p,q) \mid p^2 = q^2 = -1\}$$

$$\cong (S^2 \times S^2)/\boldsymbol{Z}_2.$$

(3) $M_{1,1}^+$ の極大対蹠集合は次の集合 $B$ に合同.

$$B := \{\psi(p, \pm p) \mid p = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}.$$

(4) $M_1^+$ の極大対蹠集合は

$$\{\psi(1,-1)\} \cup B$$

に合同.

(5) $G_2$ の極大対蹠部分群は

$$\{\psi(1,\pm 1)\} \cup B$$

に共役.