複素旗多様体の実形の交叉とFloerホモロジーへの応用 –合同とは限らない実形の場合–

酒井 高司 *
（首都大学東京 理学研究科）

Kähler 多様体において対合的反正則等長変換の不動点集合の連結成分として与えられる全測地的 Lagrange 部分多様体を**実形**と呼ぶ．田崎 [10] および田中-田崎 [7, 8, 9] はコンパクト型 Hermite 対称空間 M の二つの実形 L_0, L_1 の交叉の構造を調べ，離散的に交わるならば，その交叉 $L_0 \cap L_1$ は L_0 および L_1 の対蹠集合になることを示した．ここで，対蹠集合とはコンパクト対称空間 M の部分集合 $\mathcal{A}$ で，各点 $x \in \mathcal{A}$ における点対称 s_x によって $\mathcal{A}$ のすべての点が固定されるものであり，Chen-長野 [1] により導入された概念である．交叉の対蹠性は，実形の Floer ホモロジーの研究において本質的な役割を果たす．論文 [4] では，交叉の対蹠性を応用し，Kähler-Einstein 計量をもつコンパクト型 Hermite 対称空間内において横断的に交わる二つの実形に対する $\mathbb{Z}_2$ 係数 Floer ホモロジーを求めた．この研究を，より一般の等質 Kähler 多様体内の実形の交叉と Floer ホモロジーの研究へと発展させることを目標とする．

連結コンパクト半単純 Lie 群 G の随伴表現の軌道は G 不変な Kähler 構造をもち，複素旗多様体と呼ばれる．複素旗多様体 M に対して，G のイソトロピー部分群の中心として与えられるトーラス部分群の作用を用いて対蹠集合の概念を定義する．このとき，M の極大対蹠集合は G の Weyl 群の軌道として特徴付けられ，特にすべての極大対蹠集合は互いに合同になる（定理 1.2）．(G, K) をコンパクト型対称対とする．対称空間 G/K の線形イソトロピー表現の軌道は複素旗多様体に実形として埋め込まれ，実旗多様体と呼ばれる．定理 1.5 では，複素旗多様体 M 内において二つの実旗多様体 L_0 と L_1 の交叉 $L_0 \cap L_1$ が離散的になるための必要十分条件を与え，離散的であるとき交叉はある Weyl 群の軌道となり，M の対蹠集合になることを述べる．さらに，実形の交叉の対蹠性の応用として，複素旗多様体内の二つの実形に対して，横断的な交叉が $\mathbb{Z}_2$ 係数 Floer ホモロジーを生成することが示される（定理 2.1）．また，その系として，L_0 と L_1 の Hamilton 変形の下での交点数の下からの評価を得る（系 2.2）．

本稿の内容は井川治氏（京都工芸繊維大学），入江博氏（茨城大学），奥田隆幸氏（広島大学），田崎博之氏（筑波大学）との共同研究（[3]）に基づく．研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2016」において，入江氏が共同研究に関して発表を行い，二つの実形が合同な場合の交叉の対蹠性と Floer ホモロジーへの応用について解説を行った．本稿ではその後の共同研究の進展について，特に二つの実形が合同とは限らない場合について解説する．

* *e-mail:* sakai-t@tmu.ac.jp
本研究は科学研究費 (基盤研究 (C) 課題番号:17K05223) の助成を受けたものである．
本稿は 2018 年 9 月 3 日–9 月 4 日に東京理科大学森戸記念館において開催された研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2018」での講演の記録である．

1　複素旗多様体の実形の交叉

G を連結コンパクト半単純 Lie 群とする．G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 $x_0(\neq 0)$ をとり，G の随伴表現による x_0 の軌道を

$$M = \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{g}$$

と表す．$\mathfrak{g}$ に Killing 形式の -1 倍によって G 不変内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を定めることにより，M を Euclid 空間 $\mathfrak{g}$ 内の等質部分多様体とみることができる．$X \in \mathfrak{g}$ に対して，M 上のベクトル場 X^* を

$$X^*_x := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp tX)x = [X, x] = -\mathrm{ad}(x)X \quad (x \in M)$$

と定める．G は M に推移的に作用するので，M の点 x における接ベクトル空間 T_xM は X^*_x $(X \in \mathfrak{g})$ によって張られる．すなわち，T_xM は $\mathfrak{g}$ の部分空間として

$$T_xM = [\mathfrak{g}, x] = \mathrm{Im}(\mathrm{ad}(x)) \subset \mathfrak{g}$$

と表される．さらに，直交直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Im}(\mathrm{ad}(x)) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(x)) \tag{1.1}$$

によって，$\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(x))$ は $\mathfrak{g}$ 内における M の法ベクトル空間 $T^\perp_x M$ となる．

x_0 を固定する G のイソトロピー部分群を

$$G_{x_0} := \{g \in G \mid \mathrm{Ad}(g)x_0 = x_0\}$$

とおくと，$M = \mathrm{Ad}(G)x_0$ は等質空間 G/G_{x_0} と微分同型になる．G_{x_0} の Lie 環 $\mathfrak{g}_{x_0}$ は

$$\mathfrak{g}_{x_0} = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, x_0] = 0\} = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(x_0)).$$

となり，$\mathfrak{g}$ の直交直和分解 (1.1) により，G/G_{x_0} の原点 $o := G_{x_0}$ における接ベクトル空間は $\mathrm{Im}(\mathrm{ad}(x_0))$ と同一視される．

M 上において

$$\omega(X^*_x, Y^*_x) := \langle x, [X, Y] \rangle \qquad (x \in M,\ X, Y \in \mathfrak{g})$$

によって定められる ω は G 不変なシンプレクティック形式となり，**Kirillov-Kostant-Souriau 形式**と呼ばれる．M 上には ω と適合する G 不変な標準的複素構造 J_0 が一意的に定まり，$\omega(\cdot, J_0\cdot)$ は M 上の G 不変な Kähler 計量になる．このように与えられたコンパクト等質 Kähler 多様体 (M, J_0, ω) を**複素旗多様体**と呼ぶ．逆に，任意の単連結なコンパクト等質 Kähler 多様体は複素旗多様体として得られることが知られている．

定義 1.1. $x \in M$ に対して，x を固定する G のイソトロピー部分群 G_x の中心を $Z(G_x)$ と表す．$y \in M$ がすべての $g \in Z(G_x)$ について $\mathrm{Ad}(g)y = y$ を満たすとき，y は x の**対蹠点**であると言う．さらに，M の部分集合 $\mathcal{A}$ は任意の $x, y \in \mathcal{A}$ について y が x の対蹠点であるとき**対蹠集合**と呼ばれる．

次の定理により，複素旗多様体 M の極大対蹠集合は G の Weyl 群の軌道として特徴付けられる．

定理 1.2. $x, y \in M$ に対して，y が x の対蹠点となるための必要十分条件は $[x, y] = 0$ を満たすことである．M の任意の極大対蹠集合 $\mathcal{A}$ に対して，$\mathfrak{g}$ のある極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ が存在して，$\mathcal{A} = M \cap \mathfrak{t}$ が成り立つ．特に，M のすべての極大対蹠集合は G の随伴作用によって互いに合同である．

注意 1.3. 一般に複素旗多様体には k 対称空間の構造が入る．定理 1.2 により，定義 1.1 で与えた対蹠集合は，k 対称空間の点対称を用いて定めた対蹠集合と一致することが分かる（cf [5]）．特に，M がコンパクト型 Hermite 対称空間の場合は Chen-長野 [1] によって与えられたコンパクト対称空間の対蹠集合の概念と一致する．

複素旗多様体内において二つの実形を考える．(G, K_0, K_1) をコンパクト対称三対とする．すなわち，K_i $(i = 0, 1)$ はともに連結コンパクト半単純 Lie 群 G の対称部分群であるとする．K_i を定める G の対合を θ_i とし，それらの微分として与えられる $\mathfrak{g}$ の対合も同じ記号 θ_i で表す．θ_i により G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{p}_1$$

と二通りに標準分解する．ここで，$\mathfrak{k}_i$ は K_i の Lie 環であり，$\mathfrak{p}_i = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta_i(X) = -X\}$ である．$M = \mathrm{Ad}(G)x_0$ の基点 x_0 が $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ に含まれるとする．このとき，$\tau_i := -\theta_i|_M$ は M の対合的反正則等長変換を定め，これらの固定点集合として与えられる実形 $L_i := M \cap \mathfrak{p}_i$ を**実旗多様体**と呼ぶ．L_i には K_i が推移的に作用し，$L_i = \mathrm{Ad}(K_i)x_0$ となる．

次に，$g \in G$ に対して二つの実形の交叉 $L_0 \cap \mathrm{Ad}(g)L_1$ を考える．x_0 を含む $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとり，G のトーラス部分群 A を $A = \exp \mathfrak{a}$ と定めると，$G = K_0 A K_1$ が成り立つ．このとき，$g = g_0 a g_1$ $(g_0 \in K_0,\ a \in A,\ g_1 \in K_1)$ と表すと，

$$L_0 \cap \mathrm{Ad}(g)L_1 = L_0 \cap \mathrm{Ad}(g_0 a g_1)L_1 = \mathrm{Ad}(g_0)(L_0 \cap \mathrm{Ad}(a)L_1)$$

が成り立つ．したがって，$a = \exp H$ $(H \in \mathfrak{a})$ の場合の交叉 $L_0 \cap \mathrm{Ad}(a)L_1$ を考えれば十分である．さらに，

$$L_0 \cap \mathrm{Ad}(a)L_1 = (M \cap \mathfrak{p}_0) \cap \mathrm{Ad}(a)(M \cap \mathfrak{p}_1) = M \cap (\mathfrak{p}_0 \cap \mathrm{Ad}(a)\mathfrak{p}_1)$$

であるから，$\mathfrak{p}_0 \cap \mathrm{Ad}(a)\mathfrak{p}_1$ を調べることが本質的である．

以降では，二つの対合の可換性 $\theta_0\theta_1 = \theta_1\theta_0$ を仮定する．多くの場合はこの条件を満たす．このとき，$\mathfrak{g}$ の二つの標準分解は同時に

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{p}_1)$$

と分解される．$\alpha \in \mathfrak{a}$ に対して，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の部分空間 $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ を

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, H \rangle X \ (H \in \mathfrak{a})\}$$

によって定め，$\tilde{\Sigma} := \{\alpha \in \mathfrak{a} \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) \neq \{0\}\}$ とおく．$\tilde{\Sigma}$ は $\mathfrak{a}$ のルート系になる．さらに，$\epsilon = \pm 1$ に対して，$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ の部分空間 $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, \epsilon)$ を

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, \epsilon) = \{X \in \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) \mid \theta_0\theta_1 X = \epsilon X\}$$

によって定め，$\Sigma := \{\alpha \in \widetilde{\Sigma} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, 1) \neq \{0\}\}$, $W := \{\alpha \in \widetilde{\Sigma} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, -1) \neq \{0\}\}$ とおく．$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ は $\theta_0\theta_1$ 不変であるから，

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) = \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, 1) \oplus \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, -1)$$

と分解される．ここで定められた $(\widetilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を**対称三対***と呼ぶ（[2]）．$\mathfrak{a}$ のルート系 $\widetilde{\Sigma}$ の基本系を一つ取り，$\widetilde{\Sigma}$ の正のルート系全体の集合を $\widetilde{\Sigma}^+$ と表す．また，これにより $\Sigma^+ := \widetilde{\Sigma}^+ \cap \Sigma$, $W^+ := \widetilde{\Sigma}^+ \cap W$ とおく

$\theta_0\theta_1 = \theta_1\theta_0$ と仮定しているので，$\theta_0\theta_1$ は G 上の対合になり，これで固定される G の閉部分群を $G_{01} = F(\theta_0\theta_1, G)$ とおく．また，G_{01} 上では $\theta_0 = \theta_1$ となり，G_{01} の対合 θ_0 で固定される閉部分群を $K_{01} = F(\theta_0, G_{01})$ とおく．このとき，G_{01} と K_{01} の Lie 環はそれぞれ次で与えられる．

$$\mathfrak{g}_{01} = (\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{k}_1) \oplus (\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1), \quad \mathfrak{k}_{01} = \mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{k}_1.$$

コンパクト対称対 (G_{01}, K_{01}) の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系は Σ と一致する．$\lambda \in \Sigma$ に対して，$\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ の部分空間 $\mathfrak{p}_\lambda$ と $\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{k}_1$ の部分空間 $\mathfrak{k}_\lambda$ を次で定める．

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_\lambda &= \{X \in \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1 \mid [H, [H, X]] = -\langle \lambda, H \rangle^2 X \ (H \in \mathfrak{a})\}, \\ \mathfrak{k}_\lambda &= \{X \in \mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{k}_1 \mid [H, [H, X]] = -\langle \lambda, H \rangle^2 X \ (H \in \mathfrak{a})\}. \end{aligned}$$

さらに，$\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{k}_1$ の Lie 部分環 $\mathfrak{k}(0)$ を

$$\mathfrak{k}(0) = \{X \in \mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{k}_1 \mid [\mathfrak{a}, X] = \{0\}\}$$

で定める．このとき，$\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{k}_1$ と $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ はそれぞれ次のように直交直和分解される．

$$\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}(0) \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{k}_\lambda, \quad \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{p}_\lambda.$$

次に，$\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ の部分空間 $V(\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{p}_1)$, $V^\perp(\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{p}_1)$ と $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1$ の部分空間 $V(\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1)$, $V^\perp(\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1)$ を

$$\begin{aligned} V(\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{p}_1) &= \{X \in \mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{p}_1 \mid [\mathfrak{a}, X] = \{0\}\}, \\ V(\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1) &= \{X \in \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1 \mid [\mathfrak{a}, X] = \{0\}\}, \\ V^\perp(\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{p}_1) &= \{X \in \mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{p}_1 \mid X \perp V(\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{p}_1)\}, \\ V^\perp(\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1) &= \{X \in \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1 \mid X \perp V(\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1)\} \end{aligned}$$

で定め，$\alpha \in W$ に対して $V^\perp(\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{p}_1)$ の部分空間 $V^\perp_\alpha(\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{p}_1)$ と $V^\perp(\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1)$ の部分空間 $V^\perp_\alpha(\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1)$ を

$$\begin{aligned} V^\perp_\alpha(\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{p}_1) &= \{X \in V^\perp(\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{p}_1) \mid [H, [H, X]] = -\langle \alpha, H \rangle^2 X \ (H \in \mathfrak{a})\}, \\ V^\perp_\alpha(\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1) &= \{X \in V^\perp(\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1) \mid [H, [H, X]] = -\langle \alpha, H \rangle^2 X \ (H \in \mathfrak{a})\} \end{aligned}$$

*ここで定めた $(\widetilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ は正確には [2] によって与えられた対称三対の公理を満たすとは限らない．実際，$\widetilde{\Sigma}$ は $\mathfrak{a}$ の既約ルート系になるとは限らないし，$\theta_0 = \theta_1$ の場合は $W = \emptyset$ となる．しかし，ここでは (G, K_0, K_1) から定まる $(\widetilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を対称三対と呼ぶことにする．

で定める．このとき，$\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ と $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1$ はそれぞれ次のように直交直和分解される．

$$\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{p}_1 = V(\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{p}_1) \oplus \sum_{\alpha \in W^+} V_\alpha^\perp(\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{p}_1), \quad \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1 = V(\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1) \oplus \sum_{\alpha \in W^+} V_\alpha^\perp(\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1).$$

以上の準備の下で，$a = \exp H\ (H \in \mathfrak{a})$ に対して $\mathfrak{p}_0 \cap \mathrm{Ad}(a)\mathfrak{p}_1$ は次のように表される．

$$\mathfrak{p}_0 \cap \mathrm{Ad}(a)\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\substack{\lambda \in \Sigma^+ \\ \langle \lambda, H \rangle \in \pi\mathbb{Z}}} \mathfrak{p}_\lambda \oplus \sum_{\substack{\alpha \in W^+ \\ \langle \alpha, H \rangle \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}}} V_\alpha^\perp(\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1). \tag{1.2}$$

$\mathfrak{a}$ の部分集合 $\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ を

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} := \bigcap_{\substack{\lambda \in \Sigma \\ \alpha \in W}} \left\{ H \in \mathfrak{a} \,\middle|\, \langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z},\ \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right\}$$

で定め，$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ に含まれる $\mathfrak{a}$ の元を $(\widetilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ に関する**正則元**と呼ぶ．

注意 1.4. コンパクト対称空間 G/K_0 への K_1 の等長作用および G/K_1 への K_0 作用を **Hermann 作用**と呼ぶ．G から G/K_i への自然な射影を π_i と表す．このとき，$a = \exp H\ (H \in \mathfrak{a})$ に対して，$\pi_0(a) \in G/K_0$ を通る K_1 軌道（resp. $\pi_1(a) \in G/K_1$ を通る K_0 軌道）が正則軌道になるための必要十分条件は H が $(\widetilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ に関する正則元になることである（[2]）．

(1.2) より，$H \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ であるとき，

$$L_0 \cap \mathrm{Ad}(a)L_1 = M \cap (\mathfrak{p}_0 \cap \mathrm{Ad}(a)\mathfrak{p}_1) = M \cap \mathfrak{a}$$

となる．これから下の定理 1.5 を示すことができる．定理を述べるためにいくつか記号を準備する．$\mathfrak{a}$ のルート系 $\widetilde{\Sigma}$ の Weyl 群を $W(\widetilde{\Sigma})$ と表す．$\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{p}_i$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_i$ をとり，(G, K_i) の $\mathfrak{a}_i$ に関する制限ルート系を R_i と表し，R_i の Weyl 群を $W(R_i)$ と表す．$\theta_0\theta_1 = \theta_1\theta_0$ の仮定から，$[\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1] = \{0\}$ となる．ゆえに，$\mathfrak{a}_0$ と $\mathfrak{a}_1$ を含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ を取り，G の $\mathfrak{t}$ に関するルート系を Δ と表し，Δ の Weyl 群を $W(\Delta)$ と表す．

定理 1.5 ([3])**.** 二つの実形の交叉 $L_0 \cap \mathrm{Ad}(a)L_1$ $(a = \exp H, H \in \mathfrak{a})$ が離散的になるための必要十分条件は H が $(\widetilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ に関する正則元になることである．また，離散的な交叉 $L_0 \cap \mathrm{Ad}(a)L_1$ は M の対蹠集合になり，

$$L_0 \cap \mathrm{Ad}(a)L_1 = M \cap \mathfrak{a} = W(\widetilde{\Sigma})x_0 = W(R_0)x_0 \cap \mathfrak{a} = W(R_1)x_0 \cap \mathfrak{a} = W(\Delta)x_0 \cap \mathfrak{a}$$

と表される．

2 実旗多様体の Lagrange Floer ホモロジー

シンプレクティック多様体内の二つの Lagrange 部分多様体に対しては，これらを境界条件とする holomorphic strip のモジュライ空間から定まる不変量として Floer ホモロジーを考えることができる．ここではまず，単調な Lagrange 部分多様体の Floer ホモロジーの構成について説明する（cf. [6]）．(M, ω) を閉シンプレクティック多様体，L_0 と L_1 を M の（必ずしも Hamilton 同位とは限らない）閉 Lagrange 部分多様体とし，L_0 と L_1 は横断的に

交わると仮定する．このとき，交叉 $L_0 \cap L_1$ の各元を生成系とする自由 $\mathbb{Z}_2$ 加群を $C(L_0, L_1)$ と表す．

M 上のシンプレクティック形式 ω と適合した概複素構造の 1 パラメータ族 $J = \{J_t\}_{0 \le t \le 1}$ をとる．$\mathbb{R} \times [0,1]$ を $s + \sqrt{-1}t$ を座標系とする $\mathbb{C}$ の部分集合とみなしたとき，写像 $u : \mathbb{R} \times [0,1] \to M$ で，方程式

$$\bar{\partial}_J u := \frac{\partial u}{\partial s} + J_t(u)\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

と境界条件

$$u(\cdot, 0) \in L_0,\ u(\cdot, 1) \in L_1,$$
$$u(-\infty, \cdot), u(+\infty, \cdot) \in L_0 \cap L_1$$

を満たすものを **J-holomorphic strip** という．

交点 $p \in L_0 \cap L_1$ を発し $q \in L_0 \cap L_1$ に入る J-holomorphic strip 全体の集合を $\widetilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)$ と表す．さらに，

$$\widetilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1) := \bigcup_{p,q \in L_0 \cap L_1} \widetilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)$$

と定める．概複素構造の 1 パラメータ族 J は，$\bar{\partial}_J$ の線形化 $D_u \bar{\partial}_J$ がすべての $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1)$ について全射であるとき，regular であるという．J が regular であるとき，各 $\widetilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)$ の各連結成分は有限次元の滑らかな多様体になる．

J-holomorphic strip $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)$ に対しては，任意の $s_0 \in \mathbb{R}$ について $u(\cdot + s_0, \cdot)$ も $\widetilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1; p, q)$ の元になる．したがって，$\widetilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 \colon p, q)$ は自由な $\mathbb{R}$ 作用をもつ．そこで，この $\mathbb{R}$ 作用で割ったモジュライ空間

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_J(L_0, L_1 : p, q) &:= \widetilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)/\mathbb{R}, \\ \mathcal{M}_J(L_0, L_1) &:= \widetilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1)/\mathbb{R} \end{aligned}$$

を定める．J-holomorphic strip $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1)$ でその同値類 $[u]$ が $\mathcal{M}_J(L_0, L_1)$ の 0 次元連結成分の一つであるとき，u およびその同値類 $[u]$ **孤立軌道**と呼ぶ．

$CF(L_0, L_1)$ 上の境界作用素 $\partial : CF(L_0, L_1) \to CF(L_0, L_1)$ を

$$\partial(p) = \sum_{q \in L_0 \cap L_1} n(p, q) \cdot q$$

により定義する．ここで，$n(p, q)$ は $\mathcal{M}_J(L_0, L_1 : p, q)$ 内の孤立軌道の個数を mod 2 で数えたものである．このとき，$\partial \circ \partial = 0$ が成り立てば，**Floer チェイン複体** $(CF(L_0, L_1), \partial)$ が構成され，Lagrange 部分多様体 L_0, L_1 の $\mathbb{Z}_2$ 係数 **Floer ホモロジー群**

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) := \mathrm{Ker}(\partial)/\mathrm{Im}(\partial)$$

が定義される．Floer ホモロジー群 $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ は L_0, L_1 の Hamilton 変形で不変である．

前節で述べた設定の下，複素旗多様体 (M, J_0, ω) は Kähler-Einstein 計量 $\omega(\cdot, J_0 \cdot)$ をもつとする．これは随伴軌道の基点を取り替えることによって一般性を失うことなく仮定するこ

とができる．M の二つの実形 L_0 と L_1 を定める G の対合 θ_0, θ_1 が可換であるとき，定理 1.5 より，$(\widetilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の定める正則元 $H \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ をとり，$a := \exp H$, $L_1' := \mathrm{Ad}(a)L_1$ とおくと，L_0 と L_1' は横断的に交わる．さらに，$H \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ を適切に選ぶことにより，M の標準的複素構造 J_0 は regular であることが示される．また，M が Kähler-Einstein であることから，M の実形 L_0,L_1 は単調な Lagrange 部分多様体になり，L_0 と L_1 の最小 Maslov 数 Σ_{L_0} と Σ_{L_1} がともに 3 以上であると仮定すると，$\mathcal{M}_J(L_0, L_1 : p, q)$ の 0 次元部分のコンパクト性，および 1 次元部分のコンパクト化が示される．これにより，$\partial_{J_0} \circ \partial_{J_0} = 0$ となり，$\mathbb{Z}_2$ 係数 Floer ホモロジー $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ の定義が正当化される．さらに，交叉の対蹠性から次の結果を得る．

定理 2.1. 複素旗多様体 M は G 不変な Kähler-Einstein 計量 $\omega(\cdot, J_0 \cdot)$ をもつとする．M の二つの実形 L_0, L_1 の最小 Maslov 数 $\Sigma_{L_0}, \Sigma_{L_1}$ はともに 3 以上であると仮定する．このとき，L_1 と合同な実形 L_1' で L_0 と横断的に交わるものが存在し，

$$HF(L_0, L_1' : \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1'} \mathbb{Z}_2[p]$$

が成り立つ．すなわち，離散的な交叉 $L_0 \cap L_1'$ は $\mathbb{Z}_2$ 係数 Floer ホモロジー $HF(L_0, L_1' : \mathbb{Z}_2)$ を生成する．

定理 2.1 の系として，二つの実形の Hamilton 変形の下での交点数に関する次の不等式を得る．

系 2.2. 定理 2.1 の設定の下で，$\varphi(L_0)$ と $\psi(L_1)$ が横断的に交わるような M の任意の Hamilton イソトピー $\varphi, \psi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ に対して，次の不等式が成り立つ．

$$\#\big(\varphi(L_0) \cap \psi(L_1)\big) \geq \#(L_0 \cap L_1') = \#\big(W(\widetilde{\Sigma})x_0\big).$$

定理 2.1 の証明の概略

証明のアイデアは，[4] でコンパクト型 Hermite 対称空間内の実形の交叉の Floer ホモロジーを求めたときと同様に，J-holomorphic strip のモジュライ空間 $\mathcal{M}_J(L_0, L_1 : p, q)$ の孤立軌道の偶数性を示すことである．孤立軌道の偶数性が示されれば，Floer チェイン複体の境界作用素が $\partial = 0$ であることになり，実形の交叉が Floer ホモロジーの生成系になることが示される．M がコンパクト型 Hermite 対称空間の場合は点 p における M の点対称が $\mathcal{M}_J(L_0, L_1 : p, q)$ に自由な $\mathbb{Z}_2$ 作用を誘導するため，孤立軌道の偶数性が容易に導かれた．しかし，複素旗多様体の場合は一般には点対称を考えることはできず，一度に $\mathcal{M}_J(L_0, L_1 : p, q)$ に自由な $\mathbb{Z}_2$ 作用を定めることができない．そのため次の補題を用意する．

補題 2.3. 定理 2.1 の設定の下で，次の条件をみたす $\mathfrak{g}$ の対合 σ が存在する．

(i) $\sigma|_{\mathfrak{g}_{x_0}} = \mathrm{id}.$

(ii) $\sigma|_{[\mathfrak{g}, x_0]} \neq \mathrm{id}.$

(iii) $\mathfrak{g}$ の対合 θ が $-\theta(x_0) = x_0$ を満たすならば，$\sigma\theta = \theta\sigma$ が成り立つ．

定理 2.1 において，離散的な交叉 $L_0 \cap L_1'$ は M の対蹠集合である．また，$A = \exp \mathfrak{a}$ の作用は x_0 を固定するので $L_0 \cap L_1'$ は x_0 を含む．したがって，定理 1.2 より，任意の $x_1 \in L_0 \cap L_1'$ について $[x_0, x_1] = 0$ となり，$L_0 \cap L_1' \subset \mathfrak{g}_{x_0}$ である．補題 2.3 で与えた $\mathfrak{g}$ の対合 σ は M の正則等長変換を定める．このとき，σ による M の固定点集合 $F(\sigma, M)$ の x_0 を含む連結成分 $F_0(\sigma, M)$ は再び複素旗多様体になり，$L_0 \cap F_0(\sigma, M)$ および $L_1' \cap F_0(\sigma, M)$ はともに $F_0(\sigma, M)$ の実形になる．このとき，次の補題が示される．

補題 2.4. 任意の $x_1 \in L_0 \cap L_1'$ に対して次が成り立つ．

(i) $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_{J_0}(L_0, L_1' : x_0, x_1)$ について，$\sigma \circ u \in \widetilde{\mathcal{M}}_{J_0}(L_0, L_1' : x_0, x_1)$ となる．

(ii) $\{1, \sigma\} \cong \mathbb{Z}_2$ は

$$\mathcal{M}_{J_0}(L_0, L_1' : x_0, x_1) \setminus \{[u] \in \mathcal{M}_{J_0}(L_0, L_1' : x_0, x_1) \mid u(\mathbb{R} \times [0,1]) \subset F_0(\sigma, M)\}$$

に自由な $\mathbb{Z}_2$ 作用を定める．

補題 2.4 により，

$$\mathcal{M}_{J_0}(L_0, L_1' : x_0, x_1) \setminus \{[u] \in \mathcal{M}_{J_0}(L_0, L_1' : x_0, x_1) \mid u(\mathbb{R} \times [0,1]) \subset F_0(\sigma, M)\}$$

の 0 次元部分は偶数個であることが分かる．さらに残りの，像が $F_0(\sigma, M)$ に含まれる J-holomorphic strip を調べる必要がある．そのためには，複素旗多様体 $M_1 := F_0(\sigma, M)$ の二つの実形 $L_0 \cap F_0(\sigma, M)$ と $L_1' \cap F_0(\sigma, M)$ に対して，補題 2.3 の σ を取り，上と同様の議論を行う．これを繰り返すと有限回で M_k は有限点集合になり，操作が終了する．結論として，$\mathcal{M}_{J_0}(L_0, L_1' : x_0, x_1)$ 全体の 0 次元部分の偶数性が示される．

2.1　例

$G = SU(2n)$ の場合を考える．G 上の対合 θ_0, θ_1 を

$$\theta_0(g) = \bar{g}, \quad \theta_1(g) = J_n \bar{g} J_n^{-1} \quad (g \in G),$$

で定める．ここで，$J_n := \begin{bmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{bmatrix}$ であり，I_n は n 次単位行列を表す．このとき，$K_0 = SO(2n)$, $K_1 = Sp(n)$ となる．$\theta_0\theta_1 = \theta_1\theta_0$ を満たすので，G の Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2n)$ は

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{p}_1 \\ &= (\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{k}_1) \oplus (\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1) \oplus (\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{p}_1) \oplus (\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1) \end{aligned}$$

と分解される．ここで，

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_0 &= \{\sqrt{-1}X \mid X \in M_{2n}(\mathbb{R}),\ {}^tX = X,\ \mathrm{trace}X = 0\}, \\ \mathfrak{p}_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} X & Y \\ \bar{Y} & -\bar{X} \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} X, Y \in M_n(\mathbb{C}), \\ {}^t\bar{X} = -X,\ {}^tY = -Y \end{array} \right\} \end{aligned}$$

であり,

$$\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{-1}X & \sqrt{-1}Y \\ -\sqrt{-1}Y & \sqrt{-1}X \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} X, Y \in M_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{trace} X = 0,\ {}^tX = X,\ {}^tY = -Y \end{array} \right\}$$

となる．$\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を次のようにとる．

$$\mathfrak{a} = \left\{ H = \begin{bmatrix} \sqrt{-1}X & O \\ O & \sqrt{-1}X \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} X = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n), \\ t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R},\ t_1 + \cdots + t_n = 0 \end{array} \right\}.$$

このとき，コンパクト対称三対 (G, K_0, K_1) から定まる対称三対 $(\widetilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ は次で与えられる．

$$\widetilde{\Sigma} = \Sigma = W = \{\pm(e_i - e_j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}.$$

ここで，$e_i - e_j \in \mathfrak{a}$ $(i \neq j)$ は $\langle e_i - e_j, H \rangle = t_i - t_j$ $({}^\forall H \in \mathfrak{a})$ で定められる．したがって，

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} = \left\{ H \in \mathfrak{a} \;\middle|\; \langle e_i - e_j, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\ (1 \leq i < j \leq n) \right\}$$

となる．

$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ のいずれかであるとする．正の整数 $n, n_1, \ldots, n_r$ は $n_{r+1} := n - (n_1 + \cdots + n_r) > 0$ を満たすものとして，旗多様体 $F^{\mathbb{K}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{K}^n)$ を

$$F^{\mathbb{K}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{K}^n) = \left\{ (V_1, \ldots, V_r) \;\middle|\; \begin{array}{l} V_j \text{ は } \mathbb{K}^n \text{ の } \mathbb{K} \text{ 部分空間}, \\ \dim_{\mathbb{K}} V_j = n_1 + \cdots + n_j, \\ V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n \end{array} \right\}$$

によって定める．G の随伴軌道の基点

$$x_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{-1}X & O \\ O & \sqrt{-1}X \end{bmatrix} \in \mathfrak{a}$$

を $X = \mathrm{diag}(x_1 I_{n_1}, \ldots, x_{r+1} I_{n_{r+1}})$ であり，x_i $(i = 1, \ldots, r+1)$ は互いに異なる実数で $n_1 x_1 + \cdots + n_{r+1} x_{r+1} = 0$ を満たすようにとる．このとき，複素旗多様体

$$M = \mathrm{Ad}(G)x_0 \cong SU(2n)/S(U(2n_1) \times \cdots \times U(2n_{r+1})) \cong F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n})$$

に二つの実旗多様体

$$\begin{aligned} L_0 &= M \cap \mathfrak{p}_0 = \mathrm{Ad}(K_0)x_0 \cong SO(2n)/S(O(2n_1) \times \cdots \times O(2n_{r+1})) \cong F^{\mathbb{R}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{R}^{2n}), \\ L_1 &= M \cap \mathfrak{p}_1 = \mathrm{Ad}(K_1)x_0 \cong Sp(n)/Sp(n_1) \times \cdots \times Sp(n_{r+1}) \cong F^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n) \end{aligned}$$

が実形として埋め込まれる．

$$a = \exp H, \quad H = \begin{bmatrix} \sqrt{-1}Y & O \\ O & \sqrt{-1}Y \end{bmatrix} \in \mathfrak{a}$$

とする．ここで，$Y = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)$ とし，$t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ は $t_1 + \cdots + t_n = 0$ を満たすとする．定理 1.5 より，交叉 $L_0 \cap \mathrm{Ad}(a)L_1$ が離散的になるための必要十分条件は $H \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ であり，そのとき

$$L_0 \cap \mathrm{Ad}(a)L_1 = W(\widetilde{\Sigma})x_0 = W(R_1)x_0 \cap \mathfrak{a} = W(R_2)x_0 \cap \mathfrak{a} = W(\Delta)x_0 \cap \mathfrak{a}$$

である．この場合は $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}_1$ の極大可換部分空間にもなっており，$\widetilde{\Sigma} = R_1$ となる．$\widetilde{\Sigma}$ および R_1 は A_{n-1} 型のルート系であり，それらの Weyl 群 $W(\widetilde{\Sigma})$ と $W(R_1)$ の $\mathfrak{a}$ への作用は $X = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)$ の対角成分の置換となる．

交叉 $L_0 \cap \mathrm{Ad}(a)L_1$ は $F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n})$ の中では次のように表される．$\mathbb{C}^{2n}$ において，i, j, k を

$$iv = \sqrt{-1}v, \quad jv = J_n\bar{v}, \quad kv = ijv \quad (v \in \mathbb{C}^{2n})$$

によって定める．このとき，$\mathbb{C}^{2n}$ は $\mathbb{H}^n$ と同一視される．この同一視は $F^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n)$ の $F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n})$ への埋め込みを与える．$\mathbb{C}^{2n}$ の標準基底を $v_1, \ldots, v_{2n}$ とし，$W_i := \langle v_i, v_{n+i}\rangle_{\mathbb{C}} = \langle v_i\rangle_{\mathbb{H}}$ $(1 \leq i \leq n)$ とおく．

命題 2.5. $a = \exp H$ $(H \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}})$ に対して，$F^{\mathbb{R}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{R}^{2n})$ と $aF^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n)$ の $F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n})$ 内での交叉は

$$\begin{aligned}
&F^{\mathbb{R}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{R}^{2n}) \cap aF^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n)\\
&\cong \{(W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_{n_1}}, W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_{n_1+n_2}}, \ldots, W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_{n_1+\cdots+n_r}})\\
&\quad \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{n_1} \leq n,\ 1 \leq i_{n_1+1} < \cdots < i_{n_1+n_2} \leq n, \ldots,\\
&\quad\ 1 \leq i_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1} < \cdots < i_{n_1+\cdots+n_r} \leq n,\\
&\quad\ \#\{i_1, \ldots, i_{n_1+\cdots+n_r}\} = n_1 + \cdots + n_r\}
\end{aligned}$$

となる．これは $F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n})$ の対蹠集合である．

定理 1.2 により，

$$\begin{aligned}
&\{(\langle v_{i_1}, \ldots, v_{i_{2n_1}}\rangle_{\mathbb{C}}, \langle v_{i_1}, \ldots, v_{i_{2n_1+2n_2}}\rangle_{\mathbb{C}}, \ldots, \langle v_{i_1}, \ldots, v_{i_{2n_1+\cdots+2n_r}}\rangle_{\mathbb{C}})\\
&\quad \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2n_1} \leq 2n,\ 1 \leq i_{2n_1+1} < \cdots < i_{2n_1+2n_2} \leq 2n, \ldots,\\
&\quad\ 1 \leq i_{2n_1+\cdots+2n_{r-1}+1} < \cdots < i_{2n_1+\cdots+2n_r} \leq 2n,\\
&\quad\ \#\{i_1, \ldots, i_{2n_1+\cdots+2n_r}\} = 2n_1 + \cdots + 2n_r\}
\end{aligned}$$

は $F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n})$ の極大対蹠集合である．

さらに，定理 2.1 により次を得る．

命題 2.6. $a = \exp H$ $(H \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}})$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\dim HF(F^{\mathbb{R}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{R}^{2n}), aF^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n) : \mathbb{Z}_2)\\
&= \#\big(F^{\mathbb{R}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{R}^{2n}) \cap aF^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n)\big)\\
&= \dim H_*(F^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n) : \mathbb{Z}_2)\\
&= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_{r+1}!}\\
&< \dim H_*(F^{\mathbb{R}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{R}^{2n}) : \mathbb{Z}_2)\\
&= \dim H_*(F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n}) : \mathbb{Z}_2)\\
&= \frac{(2n)!}{(2n_1)!(2n_2)!\cdots(2n_{r+1})!}
\end{aligned}$$

が成り立つ．

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, *A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre*, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.

[2] O. Ikawa, *The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions*, J. Math. Soc. Japan **63** no. 1 (2011), 79–136.

[3] O. Ikawa, H. Iriyeh, T. Okuda, T. Sakai and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in a Kähler C-space*, in preparation.

[4] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan **65** no.4 (2013), 1135–1151.

[5] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *On the structure of the intersection of real flag manifolds in a complex flag manifold*, to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics.

[6] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, I*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 949–993.

[7] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan **64** no.4 (2012), 1297–1332.

[8] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type II*, J. Math. Soc. Japan **67** no.1 (2015), 275–291.

[9] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *Correction to: "The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type"*, J. Math. Soc. Japan **67** no.3 (2015), 1161–1168.

[10] H. Tasaki, *The intersection of two real forms in the complex hyperquadric*, Tohoku Math. J. **62** (2010), 375–382.