複素旗多様体の実形の交叉と Floer ホモロジーへの応用 —合同とは限らない実形の場合—

酒井　高司
（首都大学東京）

井川治氏，入江博氏，奥田隆幸氏，田崎博之氏との共同研究

2018 年 9 月 4 日
「部分多様体幾何とリー群作用 2018」
東京理科大学 森戸記念館

Introduction

M : コンパクト Kähler 多様体

$L_0, L_1 \subset M$: 実形

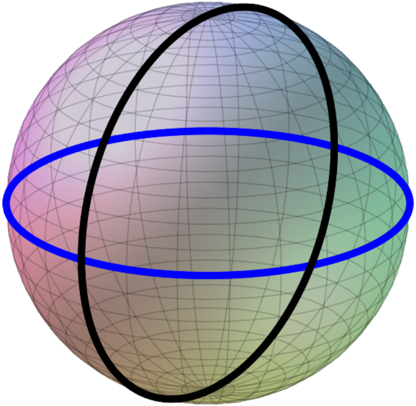
i.e. $\exists \tau_i$: M の対合的反正則等長変換 $(i = 0, 1)$

s.t. $L_i = \mathrm{Fix}(\tau_i, M)_0$

全測地的 Lagrange 部分多様体

問題

1. 交叉 $L_0 \cap L_1$ はいつ離散的になるか？　**対称三対**
2. 交叉が離散的であるとき，$L_0 \cap L_1$ の構造を明らかにせよ．
   対蹠集合
3. 交叉が離散的であるとき，交点数 $\#(L_0 \cap L_1)$ を求めよ．
   また，交点数 $\#(L_0 \cap L_1)$ は幾何学的にどんな意味を持つか？
   Floer ホモロジー
4. Lagrange 交叉に関する Arnold-Givental 型不等式への応用



$M = \mathbb{C}P^1$

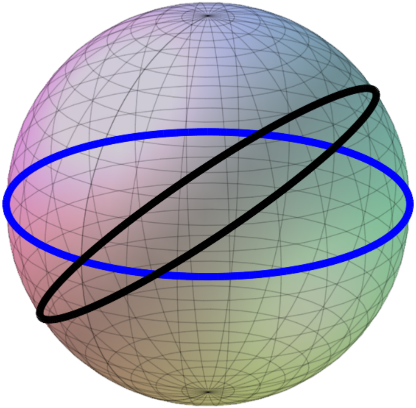
$L_0 \cong L_1 \cong \mathbb{R}P^1$

$L_0 \pitchfork L_1$ のとき

$L_0 \cap L_1 = \{x, -x\}$ 対蹠点

$\#(L_0 \cap L_1) = 2$

$= \dim H_*(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2)$



$M = \mathbb{C}P^1$

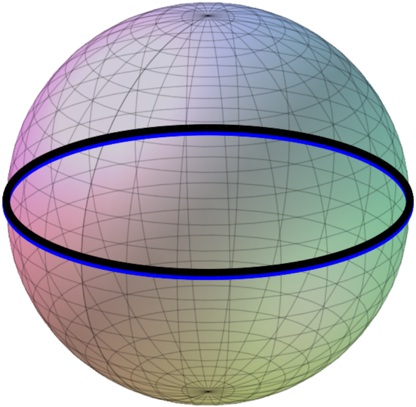
$L_0 \cong L_1 \cong \mathbb{R}P^1$

$L_0 \pitchfork L_1$ のとき

$L_0 \cap L_1 = \{x, -x\}$ 対蹠点

$\#(L_0 \cap L_1) = 2$

$= \dim H_*(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2)$



$M = \mathbb{C}P^1$

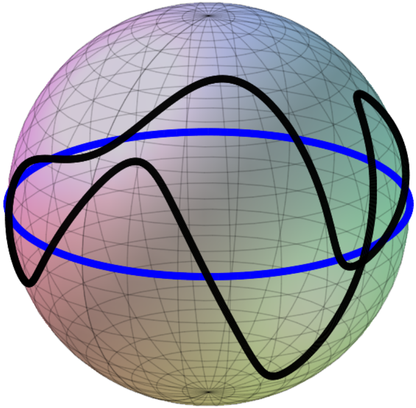
$L_0 \cong L_1 \cong \mathbb{R}P^1$

$L_0 \pitchfork L_1$ のとき

$L_0 \cap L_1 = \{x, -x\}$ 対蹠点

$\#(L_0 \cap L_1) = 2$

$= \dim H_*(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2)$



$M = \mathbb{C}P^1$

$L_0 \cong L_1 \cong \mathbb{R}P^1$

$L_0 \pitchfork L_1$ のとき

$L_0 \cap L_1 = \{x, -x\}$ 対蹠点

$\#(L_0 \cap L_1) = 2$

$= \dim H_*(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2)$

$\#(L_0 \cap \phi L_1) \geq 2$

for $\forall \phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$

コンパクト対称空間の対蹠集合

M : コンパクト Riemann 対称空間

s_x : 点 $x \in M$ における点対称

定理 (Chen-Nagano,1988)

1. $\mathcal{A} \subset M$: **対蹠集合**
   $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in \mathcal{A}$ について $s_x(y) = y$
2. $\#_2 M := \max\{\#\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subset M : \text{対蹠集合}\}$ **2-number**
3. $\mathcal{A} \subset M$: **大対蹠集合** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\#\mathcal{A} = \#_2 M$

定理 (Takeuchi, 1989)

M : 対称 R 空間 $\Longrightarrow$ $\#_2 M = \dim H_*(M, \mathbb{Z}_2)$

先行研究

定理 (Tanaka-Tasaki, 2012)

M : コンパクト型 Hermite 対称空間

$L_0, L_1 \subset M$: 実形, $\quad L_0 \pitchfork L_1$

$\implies$ 交叉 $L_0 \cap L_1$ は L_0 と L_1 の対蹠集合になる.

さらに, $L_0 \cong L_1$ のとき,

$\implies$ 交叉 $L_0 \cap L_1$ は L_0 と L_1 の大対蹠集合になる.

定理 (Iriyeh-S.-Tasaki, 2013)

1. Kähler-Einstein 計量を持つコンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形に対する $\mathbb{Z}_2$ 係数 Floer ホモロジーを求めた.
2. 複素二次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$ 内の実形 S^n の Hamilton 体積最小性を示した.

例

$\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$

$$\mathcal{A} := \{\mathbb{R}e_1, \ldots, \mathbb{R}e_{n+1}\} \subset \mathbb{R}P^n \quad \text{大対蹠集合}$$

$g \in U(n+1),\ \mathbb{R}P^n \pitchfork g\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$

$$\mathbb{R}P^n \cap g\mathbb{R}P^n \cong \{\mathbb{C}e_1, \ldots, \mathbb{C}e_{n+1}\} \subset \mathbb{C}P^n$$

$$\#(\mathbb{R}P^n \cap g\mathbb{R}P^n) = n+1 = \#_2\mathbb{R}P^n = \dim H_*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$$

目標

Hermite 対称空間におけるこれらの結果を，複素旗多様体内の二つの実形の交叉へ一般化する．

複素旗多様体

G : 連結コンパクト半単純 Lie 群
$\langle\ ,\ \rangle$: Killing 形式の -1 倍で与えられる $\mathfrak{g}$ 上の G 不変内積
$x_0(\neq 0) \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} M &:= \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{g} \quad : \text{複素旗多様体} \\ &\cong G/G_{x_0} \end{aligned}$$

ω : M 上の Kirillov-Kostant-Souriau シンプレクティック形式

$$\omega(X_x^*, Y_x^*) := \langle [X, Y], x\rangle \qquad (x \in M,\quad X, Y \in \mathfrak{g})$$

J_0 : ω と適合した M 上の G 不変な複素構造
$(\cdot,\cdot) := \omega(\cdot, J_0\cdot)$: G 不変な Kähler 計量

- 単連結コンパクト等質 Kähler 多様体は複素旗多様体である.
- 軌道の基点 x_0 を取り換えることにより, $(M \cong G/G_{x_0}, J_0)$ 上に Kähler-Einstein 計量が相似を除いて一意的に定まる.

複素旗多様体の対蹠集合 (1/2)

$x \in M$ に対して

$$\begin{aligned} G_x &:= \{g \in G \mid \mathrm{Ad}(g)x = x\} \\ Z(G_x) &:= \{g \in G_x \mid gh = hg \ (\forall h \in G_x)\} \end{aligned}$$

定義

$y \in M$ は $x \in M$ に対して**対蹠的**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall g \in Z(G_x)_0$ について $\mathrm{Ad}(g)y = y$

$\mathcal{A} \subset M$: **対蹠集合**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in \mathcal{A}$ について，y は x に対して対蹠的である．

※ この対蹠集合の定義は複素旗多様体の k 対称空間の構造を用いた対蹠集合の定義と一致する．特に，コンパクト型 Hermite 対称空間の場合は Chen-Nagano による対蹠集合の定義と一致する．

複素旗多様体の対蹠集合 (2/2)

命題

1. $\forall x, y \in M$
$$y\text{ は }x\text{ に対して対蹠的} \iff [x, y] = 0$$
2. $\mathcal{A} \subset M$: 極大対蹠集合
$$\Longrightarrow \quad \exists \mathfrak{t} \subset \mathfrak{g} : \text{極大可換部分環}$$
$$\text{s.t.} \quad \mathcal{A} = M \cap \mathfrak{t}$$
ゆえに，$\mathcal{A}$ は $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{t}$ に関する Weyl 群の軌道になる．特に，M のすべての極大対蹠集合は G 作用によって互いに合同になる．

複素旗多様体内の実旗多様体

(G, K) : コンパクト型対称対

$\tilde{\theta}$: G の対合　s.t.　$\mathrm{Fix}(\tilde{\theta}, G)_0 \subset K \subset \mathrm{Fix}(\tilde{\theta}, G)$

θ : $\mathfrak{g}$ の対合

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

$x_0 (\neq 0) \in \mathfrak{p}$

$$\begin{array}{cclcccl} L & := & \mathrm{Ad}(K)x_0 & \subset & \mathfrak{p} & & : \text{実旗多様体，} R \text{ 空間} \\ \cap & & \quad\cap & & \cap & & \\ M & := & \mathrm{Ad}(G)x_0 & \subset & \mathfrak{g} & & : \text{複素旗多様体，} C \text{ 空間} \\ & \cong & G/G_{x_0} & & & & \end{array}$$

$\tau := -\theta|_M$: M の対合的反正則等長変換

$$L = M \cap \mathfrak{p} = \mathrm{Fix}(\tau, M) \quad M \text{ の実形}$$

二つの実旗多様体の交叉

$(G, K_0), (G, K_1)$: コンパクト型対称対
$\tilde{\theta}_0, \tilde{\theta}_1$: G の対合

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{p}_1,$$

$x_0 (\neq 0) \in \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$

$$L_0 := \mathrm{Ad}(K_0)x_0, \quad L_1 := \mathrm{Ad}(K_1)x_0 \ \subset \ M := \mathrm{Ad}(G)x_0$$

$g \in G$ に対して，M 内における交叉 $L_0 \cap \mathrm{Ad}(g)L_1$ を考える．

$\mathfrak{a}$: x_0 を含む $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ の極大可換部分空間
$A := \exp \mathfrak{a} \subset G$

$G = K_0 A K_1$ より，$g = g_0 a g_1$ $(g_0 \in K_0, g_1 \in K_1, a \in A)$ と表すと

$$L_0 \cap \mathrm{Ad}(g)L_1 = L_0 \cap \mathrm{Ad}(g_0 a g_1)L_1 = \mathrm{Ad}(g_0)\underline{(L_0 \cap \mathrm{Ad}(a)L_1)}$$

$$\underline{L_0 \cap \mathrm{Ad}(a)L_1} = (M \cap \mathfrak{p}_0) \cap \mathrm{Ad}(a)(M \cap \mathfrak{p}_1) = M \cap \underline{(\mathfrak{p}_0 \cap \mathrm{Ad}(a)\mathfrak{p}_1)}$$

対称三対 (1/2)

以降では G の二つの対合 $\tilde{\theta}_0, \tilde{\theta}_1$ の可換性 $\tilde{\theta}_0\tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}_1\tilde{\theta}_0$ を仮定する.

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{k}_1) \oplus (\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1) \oplus (\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{p}_1) \oplus (\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1).$$

$$\mathfrak{p}_\lambda := \{X \in \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1 \mid [H,[H,X]] = -\langle \lambda, H\rangle^2 X \ (H \in \mathfrak{a})\} \ (\lambda \in \mathfrak{a})$$

$$\Sigma := \{\lambda \in \mathfrak{a} \setminus \{0\} \mid \mathfrak{p}_\lambda \neq \{0\}\}$$

$$\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{p}_\lambda$$

$$V_\alpha(\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1) := \{X \in \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1 \mid [H,[H,X]] = -\langle \alpha, H\rangle^2 X \ (H \in \mathfrak{a})\} \ (\alpha \in \mathfrak{a})$$

$$W := \{\alpha \in \mathfrak{a} \setminus \{0\} \mid V_\alpha(\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1) \neq \{0\}\}$$

$$\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1 = V_0(\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1) \oplus \sum_{\alpha \in W^+} V_\alpha(\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1)$$

対称三対 (2/2)

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{k}_1) \oplus (\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1) \oplus (\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{p}_1) \oplus (\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1).$$

$$\widetilde{\Sigma} := \Sigma \cup W$$

$(\widetilde{\Sigma}, \Sigma, W)$: 対称三対

$\big((\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{k}_1) + (\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1),\ (\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{k}_1),\ \theta_0 = \theta_1\big)$ は直交対称 Lie 環になり，Σ はその制限ルート系になる．

$a = \exp H \ (H \in \mathfrak{a})$ について

$$\mathfrak{p}_0 \cap \mathrm{Ad}(a)\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\substack{\lambda \in \Sigma^+ \\ \langle \lambda, H \rangle \in \pi\mathbb{Z}}} \mathfrak{p}_\lambda \oplus \sum_{\substack{\alpha \in W^+ \\ \langle \alpha, H \rangle \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}}} V_\alpha(\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{k}_1)$$

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} := \bigcap_{\substack{\lambda \in \Sigma \\ \alpha \in W}} \left\{ H \in \mathfrak{a} \;\middle|\; \langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}, \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right\}$$ 正則元

交叉の構造

定理 (Ikawa-Iriyeh-Okuda-S.-Tasaki)

$a = \exp H\ (H \in \mathfrak{a})$ に対して，

交叉 $L_0 \cap \mathrm{Ad}(a)L_1$ が離散的 $\iff$ $H \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$

さらに，交叉 $L_0 \cap \mathrm{Ad}(a)L_1$ が離散的であるとき，

$$\begin{aligned} L_0 \cap \mathrm{Ad}(a)L_1 &= M \cap \mathfrak{a} = W(\tilde{\Sigma})x_0 \\ &= W(G, K_i)x_0 \cap \mathfrak{a} \quad (i = 0, 1) \\ &= W(G)x_0 \cap \mathfrak{a} \end{aligned}$$

特に，離散的な交叉 $L_0 \cap \mathrm{Ad}(a)L_1$ は M の対蹠集合になる．

$W(\tilde{\Sigma})$: $\mathfrak{a}$ のルート系 $\tilde{\Sigma}$ の Weyl 群
$W(G, K_i)$: (G, K_i) の制限ルート系 $(i = 0, 1)$
$W(G)$: G のルート系

Hermann 作用

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} := \bigcap_{\substack{\lambda\in\Sigma \\ \alpha\in W}} \left\{ H \in \mathfrak{a} \;\middle|\; \langle \lambda, H\rangle \notin \pi\mathbb{Z}, \langle \alpha, H\rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right\}$$

P : cell, $\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ の連結成分

$$\begin{tikzcd} & K_2 \times K_1 \curvearrowright G \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ K_2 \curvearrowright G/K_1 \arrow[dr] & & K_2\backslash G \curvearrowleft K_1 \arrow[dl] \\ & K_2\backslash G/K_1 \cong \overline{P} & \end{tikzcd}$$

Hermann 作用

命題 (Ikawa, 2011)

$a = \exp H \ (H \in \mathfrak{a})$ に対して,

$K_2 a K_1 \subset G$, $K_2\pi_1(a) \subset G/K_1$, $\pi_2(a)K_1 \subset K_2\backslash G$ は正則軌道

$$\iff \quad H \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$$

$\mathbb{Z}_2$ 係数 Lagrange Floer ホモロジー (1/2)

(M, ω)：閉シンプレクティック多様体

$J = \{J_t\}_{0 \le t \le 1}$：$\omega$ と適合した M の概複素構造の 1 パラメータ族

$L_0, L_1 \subset M$：閉 Lagrange 部分多様体，$L_0 \pitchfork L_1$

定義

$p, q \in L_0 \cap L_1$ に対して，

$u : \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow M$：$p$ から q への J-**holomorphic strip**

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \bar{\partial}_J u := \dfrac{\partial u}{\partial s} + J_t(u) \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ u(s,0) \in L_0, \quad u(s,1) \in L_1 \\ u(-\infty, t) = p, \quad u(+\infty, t) = q \end{cases}$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q) := \{u : p \text{ から } q \text{ への } J\text{-holomorphic strips}\}$$

$$\mathcal{M}_J(L_0, L_1 : p, q) := \widetilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)/\mathbb{R}$$

$\mathbb{Z}_2$ 係数 Lagrange Floer ホモロジー (2/2)

$$CF(L_0, L_1) := \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2\, p$$

$$\partial : CF(L_0, L_1) \longrightarrow CF(L_0, L_1)$$

$$\partial(p) = \sum_{q \in L_0 \cap L_1} n(p,q) \cdot q$$

$n(p,q) := \#\{p$ から q への $\underbrace{\text{孤立した } J\text{-holomorphic strips}}_{\mathcal{M}(L_0, L_1 : p, q) \text{ 内の孤立点}}\} \pmod 2$

$$\partial \circ \partial = 0 \quad \Longrightarrow \quad HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) := \ker \partial / \mathrm{im} \partial$$

Lagrange Floer ホモロジー

- $HF(\phi L_0, \psi L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$
  for $\forall \phi, \psi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ with $\phi L_0 \pitchfork \psi L_1$.

二つの実形の $\mathbb{Z}_2$ 係数 Lagrange Floer ホモロジー

定理 (Ikawa-Iriyeh-Okuda-S.-Tasaki)

M : Kähler-Einstein 計量を持つ複素旗多様体

$L_0, L_1 \subset M$: 実旗多様体，$\theta_0\theta_1 = \theta_1\theta_0$

最小 Maslov 数 $\Sigma_{L_0}, \Sigma_{L_1} \geq 3$ と仮定する．

$\Longrightarrow$ L_1 と合同な実旗多様体 L_1' で $L_0 \pitchfork L_1'$ となるものが存在し，

$$HF(L_0, L_1' : \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1'} \mathbb{Z}_2[p]$$

が成り立つ．

系（Arnold-Givental 型不等式）

$$\#(\phi L_0 \cap \psi L_1) \geq \#(L_0 \cap L_1') = \#\big(W(\widetilde{\Sigma})\big)x_0 = \dim HF(L_0, L_1' : \mathbb{Z}_2)$$

for $\forall \phi, \psi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ with $\phi L_0 \pitchfork \psi L_1$.

Regularity (1/2)

任意の $u \in \widetilde{\mathcal{M}}(L_0, L_1 : p, q)$ について，$\bar{\partial}_J$ の線形化 $D_u\bar{\partial}(u)$ が全射になるとき，概複素構造の族 J は **regular** であると言う．J が regular であるとき，$\widetilde{\mathcal{M}}(L_0, L_1 : p, q)$ の各連結成分は有限次元多様体になる．

我々の設定の複素旗多様体 M に対しては，標準的複素構造 J_0 が regular であることが示される．さらに，M が Kähler-Einstein であることから，M の実形 L_0, L_1 は単調な Lagrange 部分多様体になり，最小 Maslov 数 $\Sigma_{L_0}, \Sigma_{L_1} \geq 3$ の仮定から，$\mathcal{M}(L_0, L_1 : p, q)$ の 0 次元部分がコンパクト性、1 次元部分のコンパクト化が示される．これにより，Floer ホモロジー $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ の定義が正当化される．

$$M = \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{g}$$

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Im}(\mathrm{ad}(x_0)) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(x_0)) = T_{x_0}M \oplus T_{x_0}^{\perp}M$$

補題

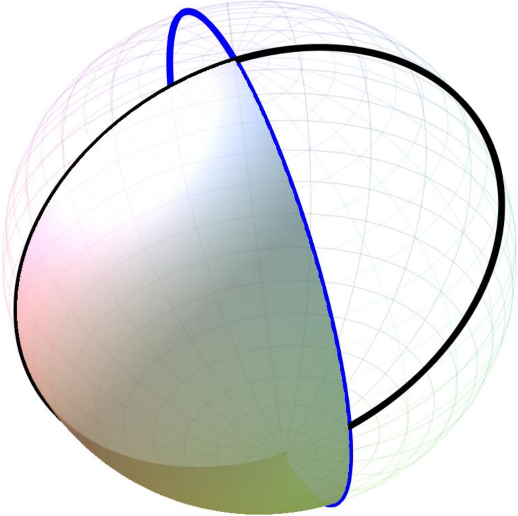
$\mathfrak{g}$ の対合的自己同型 σ で次を満たすものが存在する．

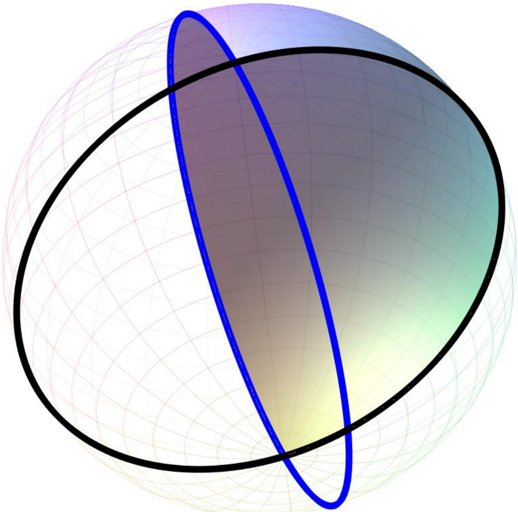
1. $\sigma|_{\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(x_0))} = \mathrm{id}$
2. $\sigma|_{\mathrm{Im}(\mathrm{ad}(x_0))} \neq \mathrm{id}$
3. $\mathfrak{g}$ の対合的自己同型 θ で $-\theta(x_0) = x_0$ を満たすものに対して，$\sigma\theta = \theta\sigma$ が成り立つ．

このとき，$x_0, x_1 \in L_0 \cap L_1'$ に対して，$\{\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}, \sigma\} \cong \mathbb{Z}_2$ は

$$\mathcal{M}_{J_0}(x_0, x_1) \setminus \{[u] \in \mathcal{M}_{J_0}(x_0, x_1) \mid \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Fix}(\sigma, M)_0\}$$

に自由な $\mathbb{Z}_2$ 作用を誘導する．





Floer ホモロジーの計算の概要 (2/2)

さらに，$\mathrm{Fix}(\sigma, M)$ の x_0 を含む連結成分 $M_1 := \mathrm{Fix}(\sigma, M)_0$ は複素旗多様体になり，$L_0 \cap M_1$ と $L_1' \cap M_1$ は M_1 の実形になる．

したがって，M_1 に対して再び適用することができる．
これを帰納的に繰り返すと，

$$M \supset M_1 \supset \cdots \supset M_{k-1} \supset M_k$$

と有限回のステップで M_k は離散的になる．

結局，$\mathcal{M}_{J_0}(L_0, L_1' : x_0, x_1)$ 全体に自由な $\mathbb{Z}_2$ 作用が定まり，
孤立した J-holomorphic strip は偶数個であると分かる．
すなわち，$\partial : CF(L_0, L_1') \to CF(L_0, L_1')$ は $\partial = 0$ である． $\square$

例

$$(G, K_0, K_1) = (SU(2n), SO(2n), Sp(n))$$

$$\theta_0(g) = \bar{g}, \quad \theta_1(g) = J_n \bar{g} J_n^{-1} (g \in G) \quad \text{where} \quad J_n := \begin{bmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{-1}X & \sqrt{-1}Y \\ -\sqrt{-1}Y & \sqrt{-1}X \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} X, Y \in M_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{trace} X = 0 \\ {}^tX = X,\ {}^tY = -Y \end{array} \right\}$$

$\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を次のようにとる.

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{-1}X & O \\ O & \sqrt{-1}X \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} X = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n), \\ t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R},\ t_1 + \cdots + t_n = 0 \end{array} \right\}$$

$$\widetilde{\Sigma} = \Sigma = W = \{\pm(e_i - e_j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

ここで, $e_i - e_j \in \mathfrak{a}$ $(i \neq j)$ は $\langle e_i - e_j, H \rangle = t_i - t_j$ で定められる.

$$x_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{-1}X & O \\ O & \sqrt{-1}X \end{bmatrix} \in \mathfrak{a}$$

を軌道の基点にとる．ここで，$X = \mathrm{diag}(t_1 I_{n_1}, \ldots, t_{r+1} I_{n_{r+1}})$ で，$t_1, \ldots, t_{r+1} \in \mathbb{R}$ は $n_1 t_1 + \cdots + n_{r+1} t_{r+1} = 0$ を満たす相異なる実数.

$$\begin{aligned} L_0 &= \mathrm{Ad}(K_0)x_0 \cong F^{\mathbb{R}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{R}^{2n}) \\ L_1 &= \mathrm{Ad}(K_1)x_0 \cong F^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^{n}) \\ M &= \mathrm{Ad}(G)x_0 \cong F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n}) \end{aligned}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ or $\mathbb{H}$

$n_{r+1} := n - (n_1 + \cdots + n_r) > 0$ を満たす $n, n_1, \ldots, n_r$ について

$$F^{\mathbb{K}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{K}^n) = \left\{ (V_1, \ldots, V_r) \;\middle|\; \begin{array}{l} V_j \subset \mathbb{K}^n \text{ 部分空間} \\ \dim_{\mathbb{K}} V_j = n_1 + \cdots + n_j \\ V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n \end{array} \right\}$$

$$a = \exp H, \quad H = \begin{bmatrix} \sqrt{-1}Y & O \\ O & \sqrt{-1}Y \end{bmatrix} \in \mathfrak{a}$$

ここで，$Y = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)$ で $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ は $t_1 + \cdots + t_n = 0$ を満たす実数．このとき，

$L_0 \cap \mathrm{Ad}(a)L_1$ が離散的

$$\iff H \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} = \left\{ H \in \mathfrak{a} \;\middle|\; \langle e_i - e_j, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \ (1 \leq i < j \leq n) \right\}$$

$$L_0 \cap \mathrm{Ad}(a)L_1 = M \cap \mathfrak{a} = W(\widetilde{\Sigma})x_0 = W(SU(2n), Sp(n))x_0$$

※ この例では，$\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ の極大可換空間 $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}_1$ の極大可換部分空間になっている．

$F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n})$ の中で交叉は次のように表示される.

$v_1, \ldots, v_{2n}$: $\mathbb{C}^{2n}$ の標準基底

$W_i := \langle v_i, v_{n+i} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle v_i \rangle_{\mathbb{H}} \quad (1 \leq i \leq n)$

命題

For $a = \exp H \ (H \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}})$,

$$\begin{aligned}
&F^{\mathbb{R}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{R}^{2n}) \cap a F^{\mathbb{H}}_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{H}^n) \\
&= \{(W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_{n_1}}, W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_{n_1+n_2}}, \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad \cdots, W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_{n_1+\cdots+n_r}}) \\
&\quad \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{n_1} \leq n, 1 \leq i_{n_1+1} < \cdots < i_{n_1+n_2} \leq n, \ldots, \\
&\quad\ 1 \leq i_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1} < \cdots < i_{n_1+\cdots+n_r} \leq n, \\
&\quad\ \#\{i_1, \ldots, i_{n_1+\cdots+n_r}\} = n_1 + \cdots + n_r\},
\end{aligned}$$

は $F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\ldots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n})$ の対蹠集合である.

例

$$
\begin{aligned}
&\dim HF(F^{\mathbb{R}}_{2n_1,\dots,2n_r}(\mathbb{R}^{2n}), F^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n) : \mathbb{Z}_2) \\
&= \#\left(F^{\mathbb{R}}_{2n_1,\dots,2n_r}(\mathbb{R}^{2n}) \cap aF^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n)\right) \\
&= \#_I(F^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n)) = \dim H_*(F^{\mathbb{H}}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{H}^n) : \mathbb{Z}_2) \\
&= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_{r+1}!} \\
&< \#_I(F^{\mathbb{R}}_{2n_1,\dots,2n_r}(\mathbb{R}^{2n})) = \dim H_*(F^{\mathbb{R}}_{2n_1,\dots,2n_r}(\mathbb{R}^{2n}) : \mathbb{Z}_2) \\
&= \#_k(F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\dots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n})) = \dim H_*(F^{\mathbb{C}}_{2n_1,\dots,2n_r}(\mathbb{C}^{2n}) : \mathbb{Z}_2) \\
&= \frac{(2n)!}{(2n_1)!(2n_2)!\cdots(2n_{r+1})!}
\end{aligned}
$$

for $a = \exp H \ (H \in \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}})$

今後の研究課題

1. G の二つの対合 θ_0, θ_1 が非可換 $\theta_0\theta_1 \neq \theta_1\theta_0$ な場合，複素旗多様体内の実形の交叉と Floer ホモロジーはどうなるか？
2. 既約なコンパクト型 Hermite 対称空間内の実形の Hamilton 体積最小性を決定せよ．より一般に，複素旗多様体内の実形についてはどうなるか？

ご清聴ありがとうございました．

今後の研究課題

1. G の二つの対合 θ_0, θ_1 が非可換 $\theta_0\theta_1 \neq \theta_1\theta_0$ な場合，複素旗多様体内の実形の交叉と Floer ホモロジーはどうなるか？
2. 既約なコンパクト型 Hermite 対称空間内の実形の Hamilton 体積最小性を決定せよ．より一般に，複素旗多様体内の実形についてはどうなるか？

ご清聴ありがとうございました．

References I

P. Albers and U. Frauenfelder, *A nondisplaceable Lagrangian torus in T^*S^2*, Comm. Pure Appl. Math. **61** (2008), 1046–1051.

D. V. Alekseevsky, *Flag manifolds*, 11th Yugoslav Geometrical Seminar (Divčibare, 1996), Zb. Rad. Mat. Inst. Beograd. (N.S.) **6** (1997), 3–35.

G. Alston, *Lagrangian Floer homology of the Clifford torus and real projective space in odd dimensions*, J. Symplectic Geom. **9** (2011), 83–106.

G. Alston and L. Amorim, *Floer cohomology of torus fibers and real Lagrangians in Fano toric manifolds*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2012), 2751–2793.

References II

- A. Arvanitoyeorgos, *An introduction to Lie groups and the geometry of homogeneous spaces*, Student Mathematical Library **22**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xvi+141 pp.
- J. Berndt, S. Console and A. Fino, *On index number and topology of flag manifolds*, Differential Geom. Appl., **15** (2001), 81–90.
- A. Besse, *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- B.-Y. Chen and T. Nagano, *A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre*, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.

References III

- A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections*, J. Differ. Geom. **28** (1988), 513–547.
- K. Fukaya, Y.-G.Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian Floer theory over integers: Spherically positive symplectic manifolds, Pure Appl. Math. Q. **9** (2013), 189-289.
- K. Fukaya, Y.-G.Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian intersection Floer theory: anomaly and obstraction. Part I., AMS/IP Stud. Adv. Math. 46.1, Amer. Math. Soc., Providence, RI; International Press, Somerville, MA, 2009.
- U. Frauenfelder, *The Arnold-Givental conjecture and moment Floer homology*, Int. Math. Res. Not. **42** (2004), 2179–2269.

References IV

- C. Gorodski and F. Podesta, *Tight Lagrangian homology spheres in compact homogeneous Kahler manifolds*, Israel J. Math. **206** (2015), no. 1, 413–429.
- E. Heintze, R. S. Palais, C. Terng and G. Thorbergsson, *Hyperpolar actions on symmetric spaces*, Geometry, topology & physics, Conf. Proc. Lecture Note Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, pp. 214–245.
- S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, New York London, 1978.
- O. Ikawa, *The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions*, J. Math. Soc. Japan **63** no. 1 (2011), 79–136.

- O. Ikawa, M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The fixed point set of a holomorphic isometry, the intersection of two real forms in a Hermitian symmetric space of compact type and symmetric triads*, Int. J. Math. **26** no. 5 (2015) 1541005 [32 pages].
- H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan **65** no.4 (2013), 1135–1151.
- H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *On the structure of the intersection of real flag manifolds in a complex flag manifold*, to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics.

References VI

H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *Lagrangian intersection theory and Hamiltonian volume minimizing problem*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics **106**, Y.J. Suh et al. (eds.), ICM Satellite Conference on "Real and Complex Submanifolds", (2014), 391–399.

Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, I*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 949–993; Addendum, Comm. Pure Appl. Math. **48** (1995), 1299–1302.

Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, II:* $(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R}P^n)$, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 995–1012.

References VII

Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, III: Arnold-Givental conjecture*, The Floer Memorial volume, Progr. Math., vol. 133, Birkhäuser, Basel (1995), 555–573.

Y.-G. Oh, *Fredholm-Regularity of Floer's Holomorphic Trajectories on Kähler Manifolds*, Kyungpook Math. J. **37** (1997), 153–164.

T. Oshima and J. Sekiguchi, *The restricted root system of a semisimple symmetric pair*, Group representations and systems of differential equations (Tokyo, 1982), Adv. Stud. Pure Math., **4**, (1984), 433–497.

C. Sánchez, *The invariant of Chen-Nagano on flag manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., **118**, No.4 (1993), 1237–1242.

C. Sánchez, *The index number of an R-space: An extension of a result of M. Takeuchi's*, Proc. Amer. Math. Soc. **125**, (1997), 893–900.

M. Takeuchi, *On conjugate loci and cut loci of compact symmetric spaces I*, Tsukuba J. Math. **2** (1978), 35–68.

M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan **64** (2012), 1297–1332.

References IX

- M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type II*, J. Math. Soc. Japan **67** (2015), 275–291.
- M. S. Tanaka and H. Tasaki, *Correction to: "The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type"* J. Math. Soc. Japan **67** (2015), 1161–1168.
- H. Tasaki, *The intersection of two real forms in the complex hyperquadric*, Tohoku Math. J. **62** (2010), 375–382.