

コンパクト対称空間の実現とその応用

—田中真紀子さんとの共同研究—

田崎博之

2018年9月15日(土)

コンパクト対称対 (G, K) から定まるコンパクト対称空間 G/K を G 内に実現し、 G の極大対蹠部分群の分類結果を利用して G/K の極大対蹠集合の分類を得る方法をコンパクト型既約 Hermite 対称空間 $DIII(n) = SO(2n)/U(n)$ および $DIII(n)^* = DIII(n)/\mathbb{Z}_2$ (n は偶数) の場合を例にして解説する。

$DIII(n)$ を記述するために $SO(2n)$ の部分集合 $\widetilde{DIII}(n) = \{g \in SO(2n) \mid g^2 = -1_{2n}\}$ を利用する。 $SO(2n)$ の極大トーラスに関する議論により $\widetilde{DIII}(n)$ は

$$\widetilde{DIII}(n) = \bigcup_{g \in SO(2n)} g \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_1) g^{-1} \cup \bigcup_{g \in SO(2n)} g \operatorname{diag}(-J_1, J_1, \dots, J_1) g^{-1}$$

と二つの連結成分の合併に分解される。ここで、 $J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ である。これら二つの連結成分は Pfaffian の値によって識別できる。

$$DIII(n) = \bigcup_{g \in SO(2n)} g \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_1) g^{-1} = \{g \in \widetilde{DIII}(n) \mid \operatorname{Pf}(g) = 1\}$$

によって $DIII(n)$ を定める。もう一つの連結成分の Pf の値は -1 である。上記の記述より $DIII(n) \cong SO(2n)/U(n)$ がわかる。 $DIII(n)$ はコンパクト型 Hermite 対称空間なので、極大対蹠集合は合同を除いて一意に定まり、

$$\Gamma_n := \left\{ \operatorname{diag}(\epsilon_1 J_1, \dots, \epsilon_n J_1) \mid \begin{array}{l} \epsilon_i = \pm 1 \\ \epsilon_1 \cdots \epsilon_n = 1 \end{array} \right\} \subset DIII(n)$$

に合同になる。

n が偶数の場合、 $SO(2n)$ を $\{\pm 1_{2n}\}$ で割ると、

$$SO(2n)^* = \frac{SO(2n)}{\{\pm 1_{2n}\}} \supset \frac{\widetilde{DIII}(n)}{\{\pm 1_{2n}\}} \supset \frac{DIII(n)}{\{\pm 1_{2n}\}} = DIII(n)^*$$

が成り立つ。これと $SO(2n)^*$ の極大対蹠部分群の分類結果を利用すると、 $DIII(n)^*$ の極大対蹠集合の分類を得られる。この際、 $\widetilde{DIII}(n)/\{\pm 1_{2n}\}$ の連結成分になる $DIII(n)^*$ を Pfaffian によって識別できることが重要になる。