コンパクト対称空間の実現とその応用

—田中真紀子さんとの共同研究—

田崎博之

筑波大学数理物質系

2018 年 9 月 15 日

(G, K)：コンパクト対称対

G/K ：コンパクト対称空間

G/K を G 内に実現

G の極大対蹠部分群の分類

$\qquad \Rightarrow G/K$ の極大対蹠集合の分類

$DIII(n) = SO(2n)/U(n)$ および

n は偶数のとき $DIII(n)/\mathbb{Z}_2$

これらを例にして上記の分類方法を解説する。

定義 (Chen-長野)

M : コンパクト Riemann 対称空間

s_x : $x \in M$ における点対称

$S \subset M$: **対蹠集合**

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \ s_x(y) = y$$

S : **大対蹠集合** $\Leftrightarrow |S|$: 最大値

上記最大値 $\#_2 M$: **2-number**

対称 R 空間の場合

2-number： Chen-長野、竹内

大対蹠集合の形： Sánchez, 田中-T.

対称 R 空間ではない場合

2-number： Chen-長野

対蹠集合の全体： わかりつつある

対蹠集合の全体がわかる

$=$ 極大対蹠集合の合同類の分類

コンパクト型既約 Hermite 対称空間

$DIII(n) = SO(2n)/U(n)$ の実現

$$\widetilde{DIII}(n) = \{g \in SO(2n) \mid g^2 = -1_{2n}\}$$

を利用して $SO(2n)$ 内に $DIII(n)$ を実現する。

$SO(2n)$ の極大トーラスに関する議論により

$$\widetilde{DIII}(n)$$

$$= \{g\,\mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_1)g^{-1} \mid g \in SO(2n)\}$$

$$\cup\, \{g\,\mathrm{diag}(-J_1, J_1, \ldots, J_1)g^{-1} \mid g \in SO(2n)\}$$

ただし、$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

これら二つの軌道は $\widetilde{DIII}(n)$ の連結成分になり、Pfaffian の値によって識別できる。

$2n$ 次交代行列の $\mathrm{Pfaffian}$ は次のように定義される。S_{2n} で $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ の置換全体を表す。

$$F_{2n} := \left\{ \sigma \in S_{2n} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma(2i-1) < \sigma(2i) \ (1 \leq i \leq n), \\ \sigma(1) < \sigma(3) < \cdots < \sigma(2n-1) \end{array} \right\}$$

$2n$ 次交代行列 $A = (a_{ij})$ に対して

$$\mathrm{Pf}(A) = \sum_{\sigma \in F_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$$

によって A の $\mathrm{Pfaffian}$ の値 $\mathrm{Pf}(A)$ を定める。

$\widetilde{DIII}(n) = \{g \in SO(2n) \mid g^2 = -1_{2n}\}$ の各元は $2n$ 次交代行列になり、$g \in SO(2n)$ に対して

$$\mathrm{Pf}(g\,\mathrm{diag}(J_1, \dots, J_1)g^{-1}) = 1,$$
$$\mathrm{Pf}(g\,\mathrm{diag}(-J_1, J_1, \dots, J_1)g^{-1}) = -1.$$

そこで、次のように $DIII(n)$ を定義する。

$$\begin{aligned} &DIII(n) \\ &= \{g \in SO(2n) \mid g^2 = -1_{2n},\ \mathrm{Pf}(g) = 1\} \\ &= \{g\,\mathrm{diag}(J_1, \dots, J_1)g^{-1} \mid g \in SO(2n)\} \end{aligned}$$

$SO(2n)$ 内での $DIII(n)$ の元の特徴付け $g^2 = -1_{2n}$ と $\mathrm{Pf}(g) = 1$ は計算できる条件なので使いやすい。
$\tilde{J} = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_1)$ における $SO(2n)$ の $DIII(n)$ への作用のイソトロピー部分群は

$$\{g \in SO(2n) \mid g\tilde{J}g^{-1} = \tilde{J}\} = U(n)$$

となり、$DIII(n) \cong SO(2n)/U(n)$ が成り立つ。

$DIII(n)$ の極大対蹠集合は合同を除いて一意に定まり、

$$\Gamma_n := \left\{ \mathrm{diag}(\epsilon_1 J_1, \ldots, \epsilon_n J_1) \,\middle|\, \begin{array}{c} \epsilon_i = \pm 1 \\ \epsilon_1 \cdots \epsilon_n = 1 \end{array} \right\} \subset DIII(n)$$

に合同になる。

n が偶数の場合、$SO(2n)$ を $\{\pm 1_{2n}\}$ で割ると、

$$
\begin{aligned}
SO(2n)^* = \frac{SO(2n)}{\{\pm 1_{2n}\}} &\supset \frac{\widetilde{DIII}(n)}{\{\pm 1_{2n}\}} \\
&\supset \frac{DIII(n)}{\{\pm 1_{2n}\}} = DIII(n)^*
\end{aligned}
$$

が成り立つ。これと $SO(2n)^*$ の極大対蹠部分群の分類結果を利用すると、$DIII(n)^*$ の極大対蹠集合の分類を得られる。

$\pi_{2n} : SO(2n) \to SO(2n)^*$ を自然な射影とする。二面体群 $D[4]$ を

$$D[4] = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

で定め、$\Delta_l = \{\mathrm{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1)\}$ とする。$SO(2n)^*$ の極大対蹠部分群はいくつかの $D[4]$ と Δ_l のテンソル積の π_{2n} による像に共役になることがわかり、それらと $DIII(n)$ の共通部分を調べることにより、$DIII(n)^*$ の極大対蹠集合の分類が得られる。