コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉

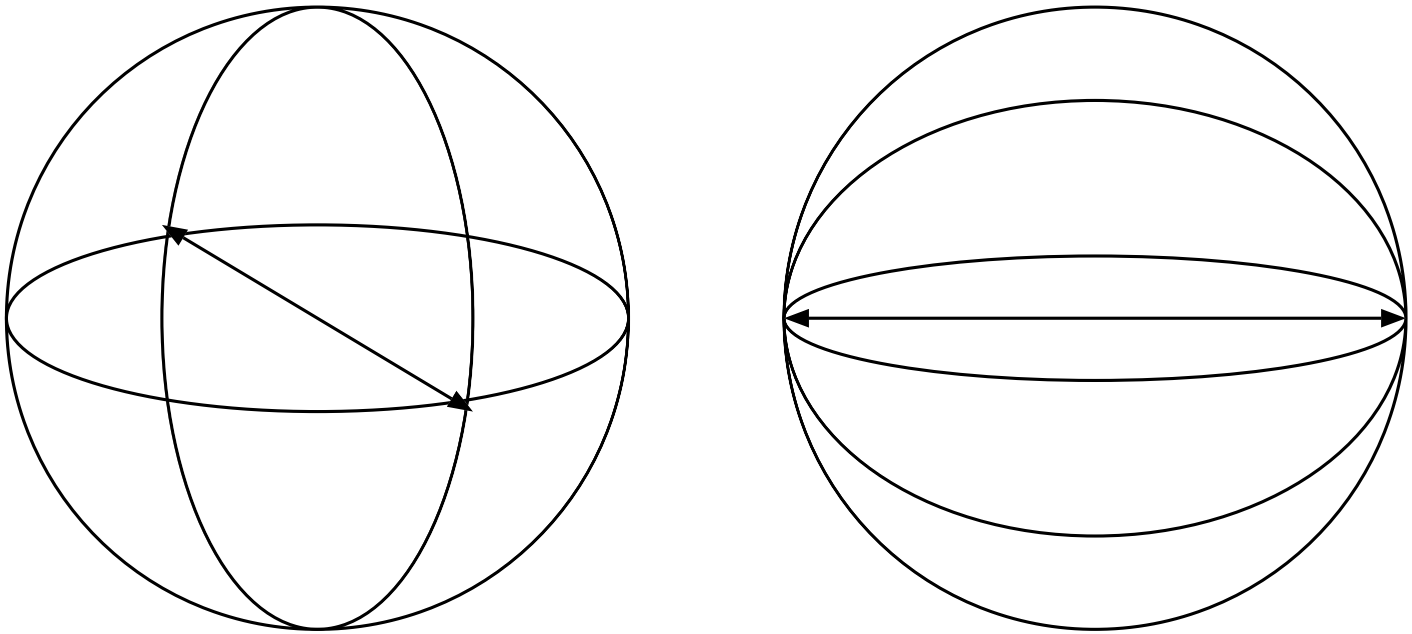
部分多様体論・湯沢 2009

田崎博之

筑波大学数理物質科学研究科

2009 年 11 月 26 日

大円の交叉



対蹠点の対

複素二次超曲面の場合：T(今夏)

一般の場合：田中-T(共同研究)

基礎になる事項：

コンパクト対称空間の

極大トーラス：竹内

実形：Leung, 竹内

極地と対蹠集合：Chen-長野

2-number と位相：竹内

1．主結果と関連事項

$\bar{M}$ ：Hermite 多様体

M ：$\bar{M}$ の実形

$\exists$ 対合的反正則等長変換

$$\sigma : \bar{M} \to \bar{M}$$

$$M = \{x \in \bar{M} \mid \sigma(x) = x\}$$

実形：全測地的 Lagrange 部分多様体

実形の例

$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$,

Lagrange部分空間,

$\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$,

$\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{C}P^1$：最初の例

コンパクト型Hermite対称空間
実形の分類：Leung, 竹内

$\mathbb{C}P^n$ ： $\mathbb{R}P^n$

$\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ ： $S^{k,n-k}$ $(0 \leq k \leq [n/2])$

$(= S^k \times S^{n-k}/\mathbb{Z}_2)$

$G_r^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n+r})$ ： $G_r^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n+r})$,

$G_q^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{m+q})$ $(n = 2m, r = 2q)$,

$U(n)$ $(n = r)$

実形の交叉を記述する準備

(Chen-長野)

M : Riemann対称空間

$S \subset M$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \quad s_x y = y$

$\#_2 M$: Mの2-number

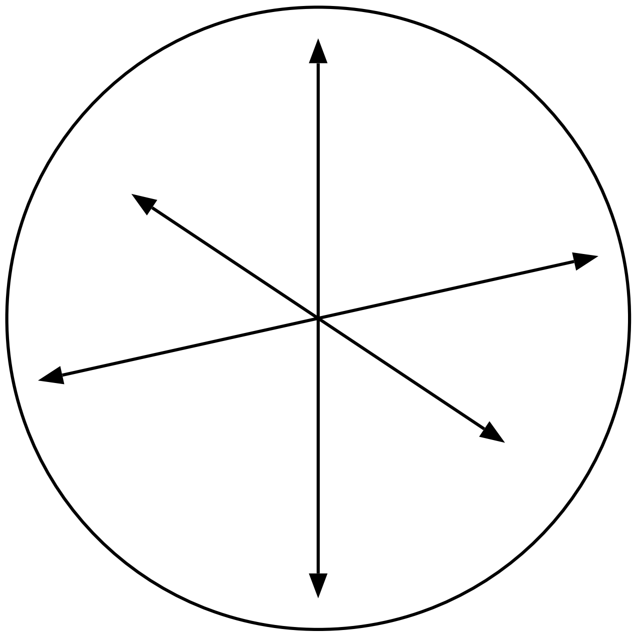
$= \sup\{\#S \mid S\text{は対蹠集合}\}$

S : 大対蹠集合 $\Leftrightarrow \#_2 M = \#S$

対蹠集合の例

S^n の対蹠点の対 $\#_2 S^n = 2$

$$\#_2 \mathbb{R}P^2 = 3$$



Chen-長野：$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

$$\#_2 G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r}) = \binom{n+r}{r}$$

竹内：

M が対称 R 空間

$\Rightarrow \#_2 M = \dim H_*(M, \mathbb{Z}_2)$

コンパクト型 Hermite

対称空間の実形：対称 R 空間

定理 1.1

M ： コンパクト型

Hermite 対称空間

L_1, L_2 ： M の実形、

横断的に交わる

$\Rightarrow$

$L_1 \cap L_2$ ： L_1 と L_2 の対蹠集合

定理 1.2

M ：コンパクト型

Hermite 対称空間

L_1, L_2 ：M の合同な実形、

横断的に交わる

$\Rightarrow$

$L_1 \cap L_2$ ：L_1 と L_2 の大対蹠集合

定理1.3

M ： **既約コンパクト**

$\quad\quad\mathrm{Hermite}$ **対称空間**

L_1, L_2 ： M **の実形、**

横断的に交わり、$\#_2 L_1 \leq \#_2 L_2$

(1) $(M, L_1, L_2) \not\cong$

$(G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m}), G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m}), U(2m))$

$(m \geq 2)$

$\Rightarrow L_1 \cap L_2$ ： L_1 **の大対蹠集合**

(2) $(M, L_1, L_2) \cong$
$(G^{\mathbb{C}}_{2m}(\mathbb{C}^{4m}), G^{\mathbb{H}}_{m}(\mathbb{H}^{2m}), U(2m))$
$(m \geq 2)$
$\Rightarrow$

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m$$
$$< \binom{2m}{m} = \#_2 G^{\mathbb{H}}_{m}(\mathbb{H}^{2m})$$
$$< 2^{2m} = \#_2 U(2m)$$

Oh

M : Hermite対称空間

L : MのLagrange部分多様体

L : 大域的タイト

$\Leftrightarrow$ $L, g \cdot L$が横断的に交わる

(g : 正則等長変換)

$$\#(L \cap g \cdot L) = \dim H_*(L, \mathbb{Z}_2)$$

系 1.4
コンパクト型 Hermite 対称空間の実形は大域的タイト

主定理 2 より

Howard：次は大域的タイト

$\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$

入江-酒井：次は大域的タイト

$S^{0,2}, S^{1,1} \subset \tilde{G}_2(\mathbb{R}^4) = S^2 \times S^2,$

$S^{0,n}, S^{1,n-1} \subset \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$

2．証明の概要

補題 2.1

M ： コンパクト Kähler 多様体、

正則断面曲率 > 0

L_1, L_2 ： M の全測地的コンパクト

Lagrange 部分多様体

$\Rightarrow L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$

Frankel の定理と同様の証明法

定理$\mathbf{2.2}$

M ： コンパクト対称空間

A ： 極大トーラス、$\boldsymbol{o} \in \boldsymbol{A}$

S ： 基本胞体 $\bar{S} = \cup_{\Delta} S^{\Delta}$

$\boldsymbol{A}_1$ ： 極大トーラス、$\boldsymbol{o} \in \boldsymbol{A}_1$

$\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{A}_1 \cap \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{p} \in \mathrm{Exp}(\boldsymbol{S}^{\Delta})$

$\Rightarrow \mathrm{Exp}(\boldsymbol{S}^{\Delta}) \subset \boldsymbol{A}_1 \cap \boldsymbol{A}$

実形の極大トーラス

定理2.2

$\Rightarrow$

実形の極大トーラスの交叉

：基本胞体の頂点

$\Rightarrow$ 定理1.1

Chen-長野

M：コンパクト対称空間

$o \in M$ の点対称 s_o

$$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$$

連結成分 M_j^+：**極地**

極地：全測地的部分多様体、

コンパクト対称空間

極地の例

$\boldsymbol{F(s_o, S^n) = \{o, \bar{o}\}},\ \boldsymbol{\bar{o}}$: 対蹠点

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ に対して

$$\boldsymbol{F(s_o, \mathbb{K}P^n) = \{o\} \cup \mathbb{K}P^{n-1}}$$

$$\boldsymbol{F(s_o, G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r}))}$$

$$\boldsymbol{= \bigcup_{j=0}^{r} G_j^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^r) \times G_{r-j}^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n)}$$

M：コンパクト型

Hermite対称空間

$\Rightarrow$ 各極地 M^+：同上

L：M の実形

$L \cap M^+ \neq \emptyset$

$\Rightarrow L \cap M^+$：M^+ の実形

M, L_1, L_2：定理 1.2, 1.3

$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$

$o \in L_1 \cap L_2$ としてよい

$L_1 \cap L_2 \subset F(s_o, M)$

$L_1 \cap L_2 =$

$\bigcup_{j=0}^{r} \{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\}$

極地による数学的帰納法