

有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合

田崎博之

筑波大学数理物質系

対蹠集合の概念は、Chen-Nagano [1] が導入した概念である。湯沢研究会では今までに以下の対蹠集合に関連した研究発表を行った。¹

- (1) コンパクト型 Hermite 対称空間の実形の交叉 (湯沢 2009)
- (2) Floer ホモロジーへの応用 (湯沢 2010)
- (3) 複素二次超曲面の実形の Hamilton 体積最小性 (湯沢 2011)

これらの研究がうまくいった原因の一つは、コンパクト型 Hermite 対称空間の対蹠集合がよくわかっているということである。定理 1.2 で述べるように、コンパクト型 Hermite 対称空間を含む対称 R 空間の対蹠集合はいくつかのよい性質を持っていて扱いやすい。これに対して一般の有向実 Grassmann 多様体は対称 R 空間ではなく、対蹠集合に関してはほとんどなにも知られていなかった。対蹠集合を定義しその基本的性質を調べている論文 [1] では、有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合について一切言及していない。この講演は、有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合に関する研究の第一歩の報告である。内容は [3] に基づいている。

1 定義と対称 R 空間の対蹠集合

定義 1.1 ([1]) M を Riemann 対称空間とする。各点 $x \in M$ における点対称を s_x で表す。 M の部分集合 S が**対蹠集合**であるとは、任意の $x, y \in S$ に対して $s_x(y) = y$ が成り立つことである。 M の **2-number** $\#_2 M$ を

$$\#_2 M = \max\{\#S \mid S \text{ は } M \text{ の対蹠集合}\}$$

によって定義する。 M の対蹠集合 S が $\#_2 M$ を実現するときに、 S を**大対蹠集合**と呼ぶ。

対称 R 空間の対蹠集合については次の結果を得た。

¹ただし、(2) と (3) の講演者はそれぞれ共同研究者の入江博さんと酒井高司さんである。

定理 1.2 (Tanaka-T. [2]) 対称 R 空間において、次の (A)、(B) が成り立つ。

(A) 任意の対蹠集合に対して、それを含む大対蹠集合が存在する。

(B) 二つの大対蹠集合は合同になる。

ただし、 M の部分集合 S_1, S_2 が合同であるとは、 S_1, S_2 が M の等長変換全体の成す群の単位連結成分の元で写り合うことである。

これにより、大対蹠集合がわかればすべての対蹠集合がわかることになる。これと比較すると有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合はまったく異なる状況であることを次節以降で示す。

対称 R 空間の例とその大対蹠集合を以下に示しておく。 $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ とする。 $\mathbb{K}^n$ 内の k 次元 $\mathbb{K}$ 部分空間全体が成す Grassmann 多様体を $G_k(\mathbb{K}^n)$ で表す。 $G_k(\mathbb{K}^n)$ は対称 R 空間になることが知られている。 $\{1, \dots, k\}$ から $\{1, \dots, n\}$ への単調増加写像全体を $\text{Inc}_k(n)$ で表す。 $\{v_i\}$ を $\mathbb{K}^n$ の $\mathbb{K}$ 正規直交基底とする。このとき、

$$\{\langle v_{\alpha(1)}, \dots, v_{\alpha(k)} \rangle_{\mathbb{K}} \mid \alpha \in \text{Inc}_k(n)\}$$

は $G_k(\mathbb{K}^n)$ の大対蹠集合である。したがって、

$$\#_2 G_k(\mathbb{K}^n) = \#\text{Inc}_k(n) = \binom{n}{k}$$

が成り立つ。

2 有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合

$\mathbb{R}^n$ 内の向きの付いた k 次元実部分空間全体が成す有向実 Grassmann 多様体を $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ で表す。適切な計量を導入することにより、 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n) \subset \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ は等長的になる。有向部分空間 $\tilde{V} \in \tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ に対して元の部分空間を V で表す。 V に関する鏡映は $r_V = 1_V - 1_{V^\perp}$ と表すことができる。 r_V は

$$\wedge^k r_V(x_1 \wedge \dots \wedge x_k) = r_V(x_1) \wedge \dots \wedge r_V(x_k) \quad (x_i \in \mathbb{R}^n)$$

によって線形等長変換 $\wedge^k r_V : \bigwedge^k \mathbb{R}^n \rightarrow \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ を誘導する。この写像は $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ を不変にし、 $s_V = \wedge^k r_V|_{\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)}$ は $\tilde{V}$ における $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の点対称を定める。 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ から $G_k(\mathbb{R}^n)$ への二重被覆

$$p : \tilde{G}_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n); \tilde{V} \mapsto V$$

を考える。 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の対蹠集合を p で写すと $G_k(\mathbb{R}^n)$ の対蹠集合になり、これに前節の結果を適用することにより次の補題を得る。以後、極大対蹠集合を $\text{MAS} = \text{maximal antipodal set}$ と呼ぶ。

補題 2.1 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の MAS は、 $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\mathbf{v} = \{v_i\}$ と部分集合 $A \subset \text{Inc}_k(n)$ によって、 $\{\pm v_{\alpha(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha(k)} \mid \alpha \in A\}$ という形になる。

上記対蹠集合を $\mathcal{A}_v(A)$ と表すことにする。 $\{1, \dots, n\}$ 内の元の個数が k の部分集合の全体を $P_k(n)$ で表す。 $\text{Inc}_k(n) \rightarrow P_k(n); \alpha \mapsto \{\alpha(i)\}$ によって、両者を同一視する。 $\vec{v}_\alpha := v_{\alpha(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha(k)} \in \tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ における点対称の作用は

$$s_{\vec{v}_\alpha}(\vec{v}_\beta) = (-1)^{\#(\beta-\alpha)} \vec{v}_\beta \quad (\alpha, \beta \in P_k(n))$$

を満たすことから、次の補題を得る。

補題 2.2 $A \subset P_k(n)$ とする。 $\mathcal{A}_v(A)$ が $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の対蹠集合になるための必要十分条件は、任意の $\alpha, \beta \in A$ に対して $\#(\beta - \alpha)$ が偶数になることである。

この補題をふまえて、部分集合 $A \subset P_k(n)$ の任意の元 $\alpha, \beta \in A$ に対して $\#(\beta - \alpha)$ が偶数になるときに、 A を対蹠的という。部分集合 $S_1, S_2 \subset P_k(n)$ が $\text{Sym}(n)$ の元によって写り合うとき、 S_1, S_2 は合同であるという。

定理 2.3 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の MAS の合同類全体と $P_k(n)$ の MAS の合同類全体は、 $A \subset P_k(n)$ に $\mathcal{A}_v(A)$ を対応させることにより一対一に対応する。

この定理より、 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の MAS の合同類全体を分類する問題は、 $P_k(n)$ の MAS の合同類全体を分類する問題に帰着する。

3 $P_k(n)$ の MAS

講演では $P_k(n)$ の MAS の合同類をすべて求める手順を述べたが、ここではページ数の都合で省略する。この手順は k が大きくなるにしたがって複雑になるため、現時点では $k \leq 4$ の場合しか分類結果を得られていない。以下では $k \leq 4$ の場合の分類結果を紹介する。

$k = 1$ のとき、 $P_1(n)$ の MAS は $\{\{1\}\}$ と合同になり、対応する $\tilde{G}_1(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}$ の MAS は $\{\pm v\}$ である。

$k = 2$ のとき、 $l = [n/2]$ とおくと $P_2(n)$ の MAS は $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2l-1, 2l\}\}$ と合同になる。対応する $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^n)$ の MAS は $\{\pm v_1 \wedge v_2, \dots, \pm v_{2l-1} \wedge v_{2l}\}$ である。これらの $\pm$ の $+$ だけの双対元の和をとると $v_1^* \wedge v_2^* + \cdots + v_{2l-1}^* \wedge v_{2l}^*$ となり、 $\mathbb{C}^l \cong \mathbb{R}^{2l} \subset \mathbb{R}^n$ 上の Kähler 形式である。

ここまでの有向実 Grassmann 多様体は対称 R 空間であり、MAS は系統的である。ところが、 $k = 3, 4$ のときは系統的ではない個性的な MAS が現れる。

$k = 3$ のとき、 $P_3(n)$ は n に応じて複数の MAS の合同類を持つ。

$$A(3, 2l+1) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \dots, \{1, 2l, 2l+1\}\}$$

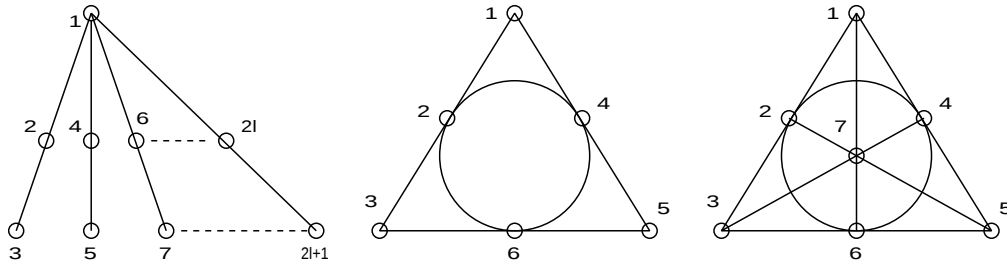
とおく。 $n \neq 6, 7, 8$ のとき、 $l = [(n-1)/2]$ とおくと $A(3, 2l+1)$ は $P_3(n)$ の MAS になる。

$$B(3, 6) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 5, 6\}\}$$

は $P_3(6)$ の MAS になる。

$$B(3, 7) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 5, 6\}\}$$

は $P_3(n)$ ($n \geq 7$) の MAS になる。これら $A(3, 2l+1), B(3, 6), B(3, 7)$ をそれぞれ次のように図で表すと交叉の関係がわかりやすくなる。



定理 3.1 $P_3(n)$ の MAS は以下のいずれかと合同になる。ただし、 $l = [(n-1)/2]$ である。

n	3, 4	5	6	7, 8	9 以上
MAS	$A(3, 3)$	$A(3, 5)$	$B(3, 6)$	$B(3, 7)$	$B(3, 7)$ または $A(3, 2l+1)$

系 3.2 $\#_2 \tilde{G}_3(\mathbb{R}^n)$ は次の表で与えられる。

n	4	5	6	7, ..., 16	17 以上
$\#_2 \tilde{G}_3(\mathbb{R}^n)$	2	4	8	14	$2[(n-1)/2]$

注意 3.3 $k = 2$ の場合と同様に MAS に対応する交代形式を考えると、 $B(3, 6)$ には $\mathbb{C}^3 \cong \mathbb{R}^6$ 上の special Lagrangian 形式、 $B(3, 7)$ には $\text{Im} \mathbb{O} \cong \mathbb{R}^7$ 上の G_2 不変 3 次交代形式、 $A(3, 2l+1)$ には $\mathbb{R} \oplus \mathbb{C}^l \cong \mathbb{R}^{2l+1}$ 上の一次形式と Kähler 形式の外積がそれぞれ対応する。

注意 3.4 $B(3, 7)$ の交叉の関係は、二元体 F_2 上の射影平面 $F_2 P^2 = (F_2^3 - \{0\}) / \sim = F_2^3 - \{0\}$ の射影直線全体の交叉の関係と同じになる。

$k = 4$ のとき、 $P_4(n)$ は n が大きくなるにつれてより多くの MAS の合同類を持つ。 $\alpha \in P_k(n)$ の補集合を α^c で表す。

$$B(4, 7) = \{\alpha^c \mid \alpha \in B(3, 7)\}$$

は $P_4(7)$ の MAS になる。

$$B(4, 8) = B(4, 7) \cup \{\alpha \cup \{8\} \mid \alpha \in B(3, 7)\}$$

は $P_4(n)$ ($n = 8, 9, 10, 11$) の MAS になる。 $n \neq 7, 8, 9$ のとき、 $l = \lfloor n/2 \rfloor$ とおくと

$$A(4, 2l) = \{\alpha \cup \beta \mid \alpha, \beta \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2l-1, 2l\}\}, \alpha \neq \beta\} \subset P_4(2l)$$

は $P_4(n)$ の MAS になる。

定理 3.5 $P_4(n)$ の MAS は $B(4, 7)$, $B(4, 8)$ と合同ないくつかの部分集合と高々一つの $A(4, 2l)$ ($l \neq 4$) の互いに素な合併と合同になる。

例 3.6 n が小さいときの MAS の例を挙げておく。

n	4	5	6	7	8	9	10
MAS	$A(4, 4)$	$A(4, 4)$	$A(4, 6)$	$B(4, 7)$	$B(4, 8)$	$B(4, 8)$	$A(4, 10), B(4, 8)$

系 3.7 $\#_2 \tilde{G}_4(\mathbb{R}^n)$ は次の表で与えられる。

n	5	6	7	8, ..., 11	12 以上
$\#_2 \tilde{G}_4(\mathbb{R}^n)$	2	6	14	28	$\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)$

注意 3.8 $B(4, 7)$ には $\text{Im} \mathbb{O} \cong \mathbb{R}^7$ 上の G_2 不変 4 次交代形式、 $B(4, 8)$ には $\mathbb{H}^2 \cong \mathbb{R}^8$ 上の $Sp(2)Sp(1)$ 不変基本 4 次形式、 $A(4, 2l)$ には $\mathbb{C}^l \cong \mathbb{R}^{2l}$ 上の Kähler 形式の二乗の $1/2$ 倍が対応する。

$k = 3, 4$ の結果を見ると、 n が $2k$ の値に近いところで個性的な MAS が現れている。 $k \geq 5$ の場合にも同様な現象が起こるのかどうか興味を持たれる。もしそうなら、背後にある原理を明らかにしたい。そのときには MAS に対応する交代形式が役に立つのかもしれない。有向実 Grassmann 多様体の MAS から重要な交代形式が現れるのを見ると、木から仁王を彫り抜くときにのみで作るんじゃなくて木の中に埋まっているのを掘り出すまでだという夏目漱石の「夢十夜」第六夜にでてくる話を思い出す。

参考文献

- [1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc. 308 (1988), 273–297.
- [2] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R -spaces, Osaka J. Math. 50 no.1 (2013), 161–169.
- [3] H. Tasaki, Antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds, to appear in International J. Math.