正則等長変換の不動点集合，
実形の交叉と対称三対

井川　治　（京都工芸繊維大学）
(共同研究：田中真紀子，田崎博之)

2013/11/23　湯沢グランドホテル

1．導入

Chen-長野理論: compact 対称空間 $M \supset S$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow s_x y = y \quad (x, y \in S)$

2. 正則等長変換の不動点集合

<u>定理</u> M**: compact** 型既約 **Hermite** 対称空間

$g \in A_0(M)$ に対して $F(g,M)$: 離散的 $\Leftrightarrow$ g : 正則元

このとき，$F(g,M)$: 大対蹠集合

M: **compact 型既約 Hermite 対称空間**

$I_0(M) = A_0(M)$

竹内勝, 村上信吾:

$M = \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2m}), G_m(\mathbb{C}^{2m})$ $(m \geq 2)$ のとき,

$I(M)/I_0(M) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \quad A(M)/A_0(M) = \mathbb{Z}_2$

M がその他の場合,

$$I(M)/I_0(M) = \mathbb{Z}_2, \quad A(M) = A_0(M)$$

$M = \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2m+2})$ のとき，

$A(M) = O(2m+2) \supset A_0(M) = SO(2m+2)$

$g \in A(M) - A_0(M)$ に対して $\mathbb{R}^{2m+2}$ の $\exists$ 正規直交基底 $\{e_1, e_2, \cdots, e_{2m+2}\}$ **s.t.** g の表現行列は

$$g = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R(\theta_m) & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

ここで，$R(\theta)$ は原点を中心とする角 θ の回転

定理

$M = \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2m+2})\ (m \geq 2), g \in A(M) - A_0(M)$ とする.

$F(g, M)$ が離散的 $\Leftrightarrow$ $R(\theta_1), \cdots, R(\theta_m)$ が互いに異なる.

このとき，$F(g, M)$ は対蹠集合で，

$\#F(g, M) = 2m < 2m + 2 = \#_2 M$

証明の概略:

$\{\pm e_1 \wedge e_2, \pm e_3 \wedge e_4, \cdots, \pm e_{2m-1} \wedge e_{2m}\} \subset F(g, M)$

上の包含において "$=$" $\Leftrightarrow R(\theta_1), \cdots, R(\theta_m)$ が互いに異なる

$\Leftrightarrow F(g, M)$ が離散的

3. S^2 の二つの大円の交叉

$$\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} ix & y + iz \\ -y + iz & -ix \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$J = (1/2, 0, 0),\ M = S^2 = \mathrm{Ad}(SU(2))J$$

$$\tau : \mathfrak{su}(2) = \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{su}(2) = \mathbb{R}^3;$$
$$X = (x, y, z) \mapsto -\bar{X} = (x, -y, z)$$

$$F(\tau) = L = \{(\tfrac{1}{2}\cos\theta, 0, \tfrac{1}{2}\sin\theta)\} = S^1 \ni J$$

$I_\tau : G = SU(2) \to G; g \mapsto \tau g \tau^{-1} = \bar{g}$

$F(I_\tau) = SO(2)$

$\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{p}$ (標準分解)

$\mathfrak{a} = \mathbb{R}J, \quad \alpha = 4J, \quad \langle \alpha, J \rangle = 1$

$R = \{\pm\alpha\} = A_1,$ ワイル群 $W(R) = \{\pm 1\}$

$H \in \mathfrak{a}$ に対して

$\langle \alpha, H \rangle \in \pi\mathbb{Z}$ のとき, $S^1 = \mathrm{Ad}(\exp H)S^1,$

$\langle \alpha, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}$ のとき,

$$S^1 \cap \mathrm{Ad}(\exp H)S^1 = \{\pm J\} = W(R)J$$

4. ルート系に付随する特性元

R**:** 内積を持つベクトル空間 $(\mathfrak{a}, \langle\ ,\ \rangle)$ の既約ルート系

$J \in \mathfrak{a} - \{0\}$ が R に付随した <u>特性元</u>

$\Leftrightarrow$ 任意の $\lambda \in R$ に対して $\langle \lambda, J \rangle = 0, \pm 1$

$W(R)$**:** R のワイル群

<u>命題</u>　　$W(R)J$ は二点等質空間

5．二つの実形の交叉

compact 型既約 Hermite 対称空間 M

実形 $L = F(\tau) \subset M = G \cdot J \subset \mathfrak{g}$

$I_\tau : G \to G; g \mapsto \tau g \tau^{-1}$ (対合)

$(G, F(I_\tau)) \rightsquigarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ (標準分解)

極大可換 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \rightsquigarrow$ 制限ルート系 $R \subset \mathfrak{a}$

$H \in \mathfrak{a}$： 正則元 $\Leftrightarrow \langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}\ (\lambda \in R)$

5.1 合同な二つの実形の交叉

<u>定理</u>

(M, J) **: compact** 型既約 **Hermite** 対称空間

$M \supset L$: 実形

$L \cap aL$: 離散的 $\Leftrightarrow H$: 正則元 $\qquad (a = \exp H,\ H \in \mathfrak{a})$

このとき,

$$L \cap aL = M \cap \mathfrak{a} = W(R)J = \text{「}L \text{ の大対蹠集合」}$$

5.2 合同でない二つの実形の交叉

二つの実形 $L_i = F(\tau_i) \subset M = G \cdot J$

$\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$ とできる.

compact 対称三対 $(G, F(I_{\tau_1}), F(I_{\tau_2}))$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \mathfrak{g} &= \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{k}_2 \oplus \mathfrak{p}_2 \\ &= (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{p}_1) \end{aligned}$$

極大 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \rightsquigarrow$ 対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$

$H \in \mathfrak{a}$: $\underline{\text{正則元}} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z} \ (\lambda \in \Sigma), \\ \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \ (\alpha \in W) \end{cases}$

定理

(M,J) ： **compact 型既約 Hermite 対称空間**

$M \supset L_1, L_2$ ： 実形 $(L_1 \neq L_2)$

$L_1 \cap aL_2$ ： 離散的 $\Leftrightarrow H$ ： 正則元

$$(a = \exp H,\ H \in \mathfrak{a})$$

このとき，

$$L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J \cap \mathfrak{a} = W(R_2)J \cap \mathfrak{a}$$

$(G, F(I_{\tau_2}))$ が正規実形に付随するとき,
$\tilde{\Sigma} = R_1,\ L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J$.

この条件を満たす (M, L_1, L_2)

例

(1) $(G_n(\mathbb{C}^{2n}), U(n), G_n(\mathbb{R}^{2n}))$. このとき,
$\#(L_1 \cap aL_2) = 2^n$.

(2) $(Sp(2m)/U(2m), Sp(m), U(2m)/O(2m))$.
このとき, $\#(L_1 \cap aL_2) = 2^m$.

(3) $(SO(4m)/U(2m), U(2m)/Sp(m), SO(2m))$.
このとき, $\#(L_1 \cap aL_2) = 2^m$.

(4) $(E_7/T\cdot E_6, T\cdot E_6/F_4, (SU(8)/Sp(4))/\mathbb{Z}_2)$.

このとき，$\#(L_1\cap aL_2)=8$.

(5) $(E_6/T\cdot Spin(10), F_4/Spin(9), G_2(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2)$.

このとき，$\#(L_1\cap aL_2)=3$.

(6) $(G_{2q}(\mathbb{C}^{2(m+q)}), G_q(\mathbb{H}^{m+q}), G_{2q}(\mathbb{R}^{2(m+q)}))$.

このとき，$\#(L_1\cap aL_2)=\begin{pmatrix} m+q \\ q \end{pmatrix}$.

$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$ のとき $\tilde{\Sigma} = R_1, L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J$

例 (7)
$(M, L_1, L_2) = (Q_{r+s+t-1}(\mathbb{C}), S^{r-1,s+t-1}, S^{r+s-1,t-1})$
$(s > 0, r < t)$ について $L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J$
$\#(L_1 \cap aL_2) = 2r.$

$\tilde{\Sigma} \neq R_1, R_2$ となる場合：

例 (8) $(M, L_1, L_2) = (G_{2m}(\mathbb{C}^{4m}), G_m(\mathbb{H}^{2m}), U(2m))$
のとき，$L_1 \cap aL_2 = W(\tilde{\Sigma})J$, $\#(L_1 \cap aL_2) = 2^m$

$$\#_2(L_1) = \binom{2m}{m}, \quad \#_2(L_2) = 2^{2m}$$

$$\tilde{\Sigma} = C_m, \quad R_1 = A_{2m-1}, \quad R_2 = C_{2m}$$

6. 今後の課題

○ 既約の仮定を落とす. $\rightsquigarrow$ $\tilde{\Sigma}$ 既約とは限らない

○ 一般化された複素旗多様体内の二つの実形の交叉

$(\mathfrak{a}_1, R_1), (\mathfrak{a}_2, R_2)$ と $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の関係

(大島-関口) $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$**:** 可換

$\rightsquigarrow$ 二つの佐武図形と対称三対の関係 **(Klein** の結果を使う**)**

○ **Hermann** 作用と実形の交叉の直接的な関係