コンパクトLie群の極大対蹠部分群

Maximal antipodal subgroups of compact Lie groups

田﨑博之

田中真紀子さんとの共同研究

群の可換部分群の任意の元の位数が 2 以下のとき、この部分群を**対蹠部分群**と呼ぶ。この講演の目的はコンパクト Lie 群の極大対蹠部分群の分類結果を発表することである。

$$\Delta_n = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n), \quad \Delta_n^{\pm} = \{ g \in \Delta_n \mid \det g = \pm 1 \}$$

とすると、Δ_n と Δ_n^+ はそれぞれ $O(n), U(n), Sp(n)$ と $SO(n), SU(n)$ の共役を除いて一意的な極大対蹠部分群である。さらに記号を準備する。

$$D[4] = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset O(2). \quad D^{\pm}[4] = \{ g \in D[4] \mid \det g = \pm 1 \}$$

によって二面体群 $D[4]$ とその部分集合 $D^{\pm}[4]$ を定める。また、四元数の標準的な基底の ± 1 倍の全体を

$$Q[8] = \{ \pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k} \}$$

とおく。

自然数 n を 2 の冪 2^k と奇数 l の積 $2^k \cdot l$ に分解し、$0 \leq s \leq k$ に対して $D[4]$ の s 個のテンソル積と $\Delta_{n/2^s}$ のテンソル積を

$$C(s, n) = D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \Delta_{n/2^s} \subset O(n)$$

によって定める。

定理 1　μ を自然数、$\mathbb{Z}_\mu$ を $U(n)$ の中心内の μ 次巡回群、θ を 1 の原始 2μ 乗根とする。$U(n)$ から $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ への自然な射影を π_n で表す。このとき、$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

(1) n または μ が奇数の場合、$\pi_n(\{1, \theta\} C(0, n)) = \pi_n(\{1, \theta\} \Delta_n)$.

(2) n かつ μ が偶数の場合、$\pi_n(\{1,\theta\}C(s,n))$ $(0 \leq s \leq k)$. ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

定理 2　μ を n の約数、$\mathbb{Z}_\mu$ を $SU(n)$ の中心内の μ 次巡回群、θ を 1 の原始 2μ 乗根とする。このとき、$SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

(1) n または μ が奇数の場合、$\pi_n(\Delta_n^+)$.

(2) n かつ μ が偶数の場合、

(a) $k = 1$ のとき、$\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta\Delta_n^-)$, $\pi_n((D^+[4] \cup \theta D^-[4]) \otimes \Delta_l)$. ただし、$n = \mu = 2$ のときは $\pi_2(\Delta_2^+ \cup \theta\Delta_2^-)$ を除く。

(b) $k \geq 2$ のとき、$\mu = 2^{k'} \cdot l'$, $1 \leq k' \leq k$ であり、l' は l の約数とする。

(b1) $k' = k$ ならば、$\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta\Delta_n^-)$, $\pi_n(C(s,n))$ $(1 \leq s \leq k)$. ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

(b2) $1 \leq k' < k$ ならば、$\pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n^+)$, $\pi_n(\{1,\theta\}C(s,n))$ $(1 \leq s \leq k)$. ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

定理 3　自然数 n を 2 の冪 2^k と奇数 l の積 $2^k \cdot l$ に分解する。

(I) $O(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。$\pi_n(C(s,n))$ $(0 \leq s \leq k)$. ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

(II) n が偶数のとき、$SO(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

(1) $k = 1$ の場合、$\pi_n(\Delta_n^+)$, $\pi_n(D^+[4] \otimes \Delta_l)$. ただし、$n = 2$ の場合は $\pi_2(\Delta_2^+)$ を除く。

(2) $k \geq 2$ の場合、$\pi_n(\Delta_n^+)$, $\pi_n(C(s,n))$ $(1 \leq s \leq k)$. ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除き、$n = 4$ の場合はさらに $\pi_4(\Delta_4^+)$ を除く。

(III) $Sp(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。
$\pi_n(Q[8] \cdot C(s,n))$ $(0 \leq s \leq k)$. ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

講演の翌日、例外型コンパクト単純 Lie 群 G_2 の極大対蹠部分群は、共役を除いて一意的であり、$\mathbb{Z}_2$ の三つの積に同型であることがわかった。さらに講演の翌月、古典型コンパクト Lie 環の自己同型群の極大対蹠部分群の分類も完成させた。講演で扱った商群は Lie 環の内部自己同型群を含んでいるので、内部自己同型群の結果を自己同型群の結果に拡張できた。これらの Lie 環の対合的自己同型写像で互いに可換なものの極大集合の分類を与えたことにもなる。