八元数、G_2、対蹠集合、およびFano平面

田崎博之

(筑波大学)

田中真紀子さん保倉理美さんとの共同研究

湯沢 2019

2019 年 11 月 29 日

$\boldsymbol{H}$: 四元数体　$\boldsymbol{O} := \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}$

$\boldsymbol{O}$: 八元数　積の定義

$$(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{mn} - \overline{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{bm})$$

$$((\boldsymbol{m}, \boldsymbol{a}), (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{O})$$

$$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{O}) := \{\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{GL_R}(\boldsymbol{O}) \mid$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{xy}) = (\boldsymbol{\alpha x})(\boldsymbol{\alpha y})\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{O})\}$$

$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{O})$: $\boldsymbol{G_2}$ 型連結コンパクト Lie 群

$\boldsymbol{G_2} = \mathrm{Aut}(\boldsymbol{O})$ で表す

写像 $\psi : Sp(1) \times Sp(1) \to G_2$ を

$$\psi(p,q)(m,a) := (qm\overline{q}, pa\overline{q})$$

$$(p,q \in Sp(1),\ (m,a) \in O)$$

と定める。ψ は Lie 群の準同型写像

$$\ker\psi = \{\pm(1,1)\}$$

$$\psi(Sp(1)^2) = Z_{\psi(1,-1)}(G_2)$$

$$\cong SO(4)$$

定義(Chen-長野)

M : コンパクトRiemann対称空間

s_x : $x \in M$における点対称

$S \subset M$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \ s_x(y) = y$

$\#_2 M = \max\{|A| \mid A : \text{対蹠集合}\}$

$F(s_x, M)$の各連結成分 : 極地

極地を調べることが対蹠集合を調べることの手がかり

極大対蹠集合の例

$\boldsymbol{S^n(r)} \quad \{\pm \boldsymbol{x}\}$：極大対蹠集合

$\boldsymbol{S^{n_1}(r_1) \times S^{n_2}(r_2)} \quad \{(\pm \boldsymbol{x}, \pm \boldsymbol{y})\}$

$\boldsymbol{S^{n_1}(r_1) \times S^{n_2}(r_2)}/\{\pm 1\}$

$\{[\boldsymbol{x}_1, \pm \boldsymbol{y}_1], \ldots, [\boldsymbol{x}_k, \pm \boldsymbol{y}_k]\}$

$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n_1+1}$：$\mathbb{R}^{n_1+1}$の直交基底

$\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{n_2+1}$：$\mathbb{R}^{n_2+1}$の直交基底

$\boldsymbol{k} = \min\{\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\} + 1$

コンパクト Lie 群

両側不変 Riemann 計量

　$\longrightarrow$ コンパクト Riemann 対称空間

　点対称 $\boldsymbol{s_x(y) = xy^{-1}x}$

点対称を代数的に表現できる

コンパクト Lie 群を Riemann 対称空間

とみなすことにより、その代数構造を

幾何学的観点から調べることができる

$\boldsymbol{G}$：コンパクト Lie 群

$\boldsymbol{A}$：単位元を含む極大対蹠集合

$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{s_e(x)} = \boldsymbol{x^{-1}},\ \boldsymbol{x^2} = \boldsymbol{e}$

$\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{s_x(y)} = \boldsymbol{xy^{-1}x},$

$\boldsymbol{xy} = \boldsymbol{yx}$

$\boldsymbol{A}$ の元の積は可換　$\forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{s_z(xy)} = \boldsymbol{z(xy)^{-1}z} = \boldsymbol{zy^{-1}zzx^{-1}z}$$
$$= \boldsymbol{s_z(y)s_z(x)} = \boldsymbol{xy}$$

$\boldsymbol{A}$ の極大性より $\boldsymbol{xy} \in \boldsymbol{A}$　$\boldsymbol{A}$ は部分群

$\boldsymbol{A}$ の単位元以外の各元の位数は $\mathbf{2}$

有限 Abel 群の基本定理より

$\boldsymbol{A} \cong \mathbb{Z}_{\mathbf{2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{\mathbf{2}}$.

極大対蹠部分群 (MAS) を求めるには

$$\boldsymbol{F(s_e, G) = \{x \in G \mid x^2 = e\}}$$

が重要　　　$\boldsymbol{I_x(g) = xgx^{-1}\ (g \in G)}$

$$\boldsymbol{x(\neq e) \in A \cap F(s_e, G)}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow A \subset Z_x(G) = F(I_x, G)}$$

$\boldsymbol{Z_x(G)}$ の MAS から $\boldsymbol{G}$ の MAS

単位元を含む極大対蹠集合：部分群

極大対蹠集合の合同類の分類

$\to$ **MAS** の共役類の分類

古典型コンパクト **Lie** 群、その商群

湯沢 **2015 SC**(田崎)

$\boldsymbol{G_2}$ 型コンパクト **Lie** 群

湯沢 **2016** (保倉)

今回は別証明を与える

$\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{G_2}$ の $\mathbf{MAS}$

$\exists \boldsymbol{z}(\neq \boldsymbol{e}) \in \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{F}(\boldsymbol{s_e}, \boldsymbol{G_2})$

このため、まず $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s_e}, \boldsymbol{G_2})$ を調べる

すなわち、$\boldsymbol{G_2}$ の極地を調べる

ここまでは $\boldsymbol{G_2}$ に限らない一般論

$$G_2 \supset \psi(Sp(1)^2) \cong SO(4)$$

ともに階数 2

$$T = \{\psi(e^{is}, e^{it}) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

は $\psi(Sp(1)^2)$ と G_2 の極大トーラス

$$G_2 = \bigcup_{g \in G_2} gTg^{-1}$$

$$F(s_e, G_2) = \bigcup_{g \in G_2} gF(s_e, T)g^{-1}$$

$$F(s_e, T) = \{\psi(1, \pm 1), \psi(i, \pm i)\}$$

$$F(s_e, G_2)\backslash\{e\}$$

$$= \bigcup_{g \in G_2} g\{\psi(1,-1), \psi(i, \pm i)\}g^{-1}$$

$$S_{(i,0)}(G_2) = \{g \in G_2 \mid g(i,0) = (i,0)\}$$

$$\cong SU(3)$$

$$\psi(1,-1), \psi(i, \pm i) \in S_{(i,0)}(G_2)$$

$F(s_e, SU(3))\backslash\{e\}$ は単一の軌道

$\psi(1,-1), \psi(i,\pm i)$：互いに共役

$F(s_e, G_2)\backslash\{e\}$

$= \{g\psi(1,-1)g^{-1} \mid g \in G_2\}$

e 以外の極地は $\psi(1,-1)$ の軌道のみ

A：G_2 の MAS 共役なものに取り換え

$\psi(1,-1) \in A$ とできる

$A \subset Z_{\psi(1,-1)}(G_2) = \psi(Sp(1)^2)$

A は $\Psi = \{\psi(p,\pm p) \mid p = 1, i, j, k\}$

に共役　G_2 の MAS は Ψ のみ

$\boldsymbol{Z_{\psi(1,-1)}(G_2)}$ の $\mathbf{MAS}$ も $\boldsymbol{\Psi}$ のみ

$$\boldsymbol{\Psi = \{\psi(p, \pm p) \mid p = 1, i, j, k\}}$$
$$\boldsymbol{\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}\ \mathbf{:}\ 階数\,\mathbf{3}$$

$$\boldsymbol{\#_2 G_2 = |\Psi| = 2^3}$$

上記の階数 $\boldsymbol{> 2}$ **:** $\boldsymbol{G_2}$ の階数

すなわち、$\boldsymbol{G_2}$ の $\mathbf{MAS}$ $\boldsymbol{\Psi}$ は $\boldsymbol{G_2}$ の極大トーラスに収まらない

$$\boldsymbol{F(s_e, G_2) = \{e\} \cup M_1^+,}$$

$$\boldsymbol{M_1^+ = \{g\psi(1,-1)g^{-1} \mid g \in G_2\}}$$

$$\boldsymbol{\cong G_2/SO(4)}$$

$\boldsymbol{M_1^+}$ の極大対蹠集合 (MAS)

$$\boldsymbol{\Psi_1 = \{\psi(1,-1)\}}$$

$$\boldsymbol{\cup \{\psi(p, \pm p) \mid p = i, j, k\}}$$

$$\boldsymbol{\#_2 M_1^+ = |\Psi_1| = 7}$$

$\tilde{G}_{\text{ass}}$: 結合的 Grassmann 多様体

O の実 4 次元部分体全体

各元は H に同型、結合的

$\tilde{G}_{\text{ass}} \subset \tilde{G}_3(R^7)$ とみなせる

全測地的部分多様体になる

G_2 は $\tilde{G}_{\text{ass}}$ に推移的に作用

$$\tilde{G}_{\text{ass}} \cong G_2/S_{\mathrm{Im}H\times\{0\}}(G_2)$$

$$S_{\mathrm{Im}H\times\{0\}}(G_2) = Z_{\psi(1,-1)}(G_2)$$

$$M_1^+ \cong G_2/Z_{\psi(1,-1)}(G_2)$$

$\boldsymbol{G_2}$ 同変微分同型 $\boldsymbol{M_1^+ \cong \tilde{G}_{\mathrm{ass}}}$

$\boldsymbol{\xi \in M_1^+ \quad \xi^2 = 1_{\mathrm{Im}O}}$

$\boldsymbol{\xi}$ の固有値は $\boldsymbol{\pm 1}$

$\boldsymbol{V_1(\xi) = \{z \in \mathrm{Im}O \mid \xi z = z\} \in \tilde{G}_{\mathrm{ass}}}$

$\boldsymbol{M_1^+ \cong \tilde{G}_{\mathrm{ass}}}$ は $\boldsymbol{\xi \in M_+}$ にその 1 固有空間 $\boldsymbol{V_1(\xi) \in \tilde{G}_{\mathrm{ass}}}$ を対応させる

$\boldsymbol{\Psi_1 \subset M_1^+ \to \tilde{\Psi}_1 \subset \tilde{G}_{\mathrm{ass}} \subset \tilde{G}_3(R^7)}$

$\boldsymbol{\tilde{\Psi}_1}$ は $\boldsymbol{\tilde{G}_3(R^7)}$ の対蹠集合、$\boldsymbol{|\tilde{\Psi}_1| = 7}$

$\tilde{G}_k(\boldsymbol{R}^n)$ の MAS

$[\boldsymbol{n}] = \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \ldots, \boldsymbol{n}\}$

$\binom{[n]}{\boldsymbol{k}}$: $[\boldsymbol{n}]$ 内の濃度 $\boldsymbol{k}$ の部分集合全体

$\boldsymbol{A} \subset \binom{[n]}{\boldsymbol{k}}$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{A}$ $|\boldsymbol{\alpha} \backslash \boldsymbol{\beta}|$: 偶数

$\binom{[n]}{\boldsymbol{k}}$ の MAS の合同類と

$\tilde{G}_k(\boldsymbol{R}^n)$ の MAS の合同類

: 一対一対応

$\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$: $\boldsymbol{R}^n$ の正規直交基底

$\boldsymbol{\alpha} \in \binom{[n]}{k}$ に対して $\boldsymbol{\alpha} = \{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_k\}$

$\boldsymbol{A} \subset \binom{[n]}{k}$: 対蹠集合

$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{A}) = \{\pm\langle \boldsymbol{e}_{\alpha_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{\alpha_k}\rangle \mid \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{A}\}$

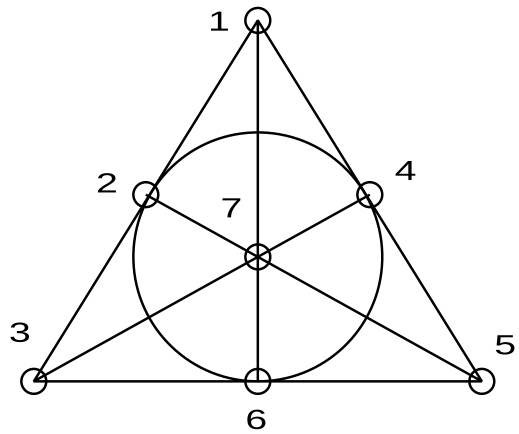
: $\tilde{\boldsymbol{G}}_k(\boldsymbol{R}^n)$ の対蹠集合

これにより

$\binom{[n]}{k}$ の $\mathbf{MAS} \leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{G}}_k(\boldsymbol{R}^n)$ の $\mathbf{MAS}$

$$\boldsymbol{A} \leftrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{A})$$

$\binom{[7]}{3}$ のMAS：Fano平面(7点集合)



$\Psi_1 \subset M_1^+ \cong \tilde{G}_{\mathrm{ass}} \subset \tilde{G}_3(\boldsymbol{R}^7)$

$\{\pm\xi \mid \xi \in \Psi_1\}$：$\tilde{G}_3(\boldsymbol{R}^7)$ のMAS

Ψ_1 はFano平面の元の組合せによって

$\boldsymbol{O}$ の積の演算表を定める