古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合

田中 真紀子（東京理科大学）

部分多様体論・湯沢**2018**

2018年**11**月**29**日**–12**月**1**日

湯沢グランドホテル

田崎博之先生との共同研究

1. **Introduction**

2. 古典型コンパクト**Lie**群の極大対蹠部分群

3. 分類の基本方針

4. $DIII(n)$とその商空間の極大対蹠集合

1. Introduction

M： コンパクトRiemann対称空間

s_x： xにおける点対称

i.e., (i) s_x はMの等長変換, (ii) ${s_x}^2 = \mathrm{id}$, (iii) x はs_xの孤立不動点

$S \subset M$： 部分集合

S： 対蹠集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in S,\ s_x(y) = y$

Mの2-number $\#_2 M$

$\#_2 M :=$ max$\{|S| \mid S \subset M$ 対蹠集合$\}$

S： 大対蹠集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $|S| = \#_2 M$

(Chen-Nagano 1988)

例 **(1)** $M = S^n\,(\subset \mathbb{R}^{n+1})$

$x \in S^n$に対して$\{x, -x\}$は大対蹠集合，$\#_2 S^n = 2$

(2) $M = \mathbb{R}P^n$

$e_1, \dots, e_{n+1}$： $\mathbb{R}^{n+1}$の正規直交基底

$\{\langle e_1 \rangle_{\mathbb{R}}, \dots, \langle e_{n+1} \rangle_{\mathbb{R}}\}$：大対蹠集合，$\#_2 \mathbb{R}P^n = n+1$

(3) $M = U(n)$ $\quad s_x(y) = xy^{-1}x$

$s_{1_n}(y) = y \;\Leftrightarrow y^2 = 1_n$ $\quad$ (1_n： 単位行列)

$x^2 = y^2 = 1_n \;\Rightarrow\; s_x(y) = y$ **iff** $xy = yx$

$$\left\{\begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix}\right\}\text{： 大対蹠集合，}\#_2 U(n) = 2^n$$

一般には極大対蹠集合は大対蹠集合とは限らない

(T.-田崎 2013) 対称R空間Mに対して次が成立

(i) Mの任意の対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる

(ii) Mの任意の二つの大対蹠集合は$I_0(M)$合同

(iii) Mの大対蹠集合は**Weyl**群の軌道

注意： $S^n, \mathbb{R}P^n, U(n)$は対称R空間

対称R空間Lは、あるコンパクト型**Hermite**対称空間Mの実形

i.e., $\exists\tau$： Mの対合的反正則等長変換 **s.t.**

$L = F(\tau, M) := \{x \in M \mid \tau(x) = x\}$ (連結)

(T.-田崎 2012)

M： コンパクト型**Hermite**対称空間

L_1, L_2： M の実形，交叉が離散的

$\Rightarrow L_1 \cap L_2$はL_i $(i = 1, 2)$ の対蹠集合

さらに，L_1, L_2が合同ならば$L_1 \cap L_2$は大対蹠集合

Chen-Nagano は殆ど全てのコンパクト対称空間について $\#_2 M$ を決定。例外は有向実**Grassmann**多様体やスピン群。対蹠集合の元の個数の評価が主。対蹠集合の構造を理解したい。

目標：コンパクト対称空間Mの極大対蹠集合の分類、すなわち、Mの極大対蹠集合の$I_0(M)$合同類を代表元の具体的表示を与えることにより分類する。

既知の結果:古典型コンパクトLie群 $G = U(n), SU(n)$, $O(n), SO(n), Sp(n)$およびその商群G/Γ（ΓはGの中心の部分群）、有向実Grassmann多様体$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n), k \leq 4$（$k = 3, 4$の場合は田崎）、例外型コンパクトLie群$G_2$、$G_2/SO(4)$（T.-田崎-保倉）

MがコンパクトLie群の場合はGriess, Yuによる研究、Mがコンパクト既約対称空間の場合はYuによる研究がある。

2. 古典型コンパクトLie群の極大対蹠部分群

G：両側不変計量をもつコンパクトLie群

$x \in G,\ s_x(y) = xy^{-1}x \quad (y \in G)$

e：Gの単位元

$s_e(y) = y \Leftrightarrow y^2 = e$

$x^2 = y^2 = e$のとき、$s_x(y) = y \Leftrightarrow xy = yx$

S：Gの極大対蹠集合, $e \in S \ \Rightarrow\ S$は部分群

$S \cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{r} \qquad |S| = 2^r$

$r \geq \mathrm{rank}(G)$（$r > \mathrm{rank}(G)$ も起こり得る）

$$\Delta_n := \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n)$$

$$\Delta_n^{\pm} := \{ g \in \Delta_n \mid \det g = \pm 1 \}$$

$O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$ の極大対蹠部分群（**MAS**）は Δ_n に共役であり、$SO(n)$, $SU(n)$ の **MAS** は Δ_n^{+} に共役

$$D[4] := \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{（二面体群）}$$

$$D[4]^{+} := \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$n = 2^k \cdot l,\ \ l$は奇数

$0 \leq s \leq k$なるsに対して

$$\begin{aligned} D(s,n) &:= \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{s} \otimes \Delta_{n/2^s} \subset O(n) \\ &= \{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \\ &\qquad\qquad \mid d_1, \ldots, d_s \in D[4], d_0 \in \Delta_{n/2^s}\} \end{aligned}$$

$$Q[8] := \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}$$

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1,$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k},\ \ \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i},\ \ \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$$

注意：$\Delta_2 \subsetneq D[4]$,

$$\Delta_4^+ = \Delta_2 \otimes \Delta_2 \subsetneq D[4] \otimes D[4] = D(2,4),$$

$$D(k-1, 2^k) = \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{k-1} \otimes \Delta_2$$

$$\subsetneq \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{k-1} \otimes D[4] = D(k, 2^k)$$

<u>定理 1</u>（**T.-田崎 2017**）

$\mathbb{Z}_\mu := \{\alpha 1_n \,|\, \alpha^\mu = 1_n\} \subset U(n)$

θ：1の原始2μ乗根

$\pi_n : U(n) \to U(n)/\mathbb{Z}_\mu$：自然な射影

$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$の**MAS**は次の何れかに共役

（**1**）nまたはμが奇数の場合

$$\pi_n(\Delta_n \cup \theta\Delta_n)$$

（**2**）nおよびμが偶数の場合

$$\pi_n(D(s,n) \cup \theta D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$の場合は除く

定理 2（**T.-田崎 2017**）

$\tilde{G} = O(n), SO(n), Sp(n)$

ただし、$\tilde{G} = SO(n)$のときnは偶数

$G = \tilde{G}/\{\pm 1_n\}$

$\pi_n : \tilde{G} \to G$ ： 自然な射影

(1) $O(n)/\{\pm 1_n\}$の**MAS**は次の何れかに共役

$$\pi_n(D(s,n)) \quad (0 \le s \le k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$の場合は除く

(2) $SO(n)/\{\pm 1_n\}$の**MAS**は次の何れかに共役

$k = 1$の場合　$\pi_n(\Delta_n^+)$, $\pi_n(D[4]^+ \otimes \Delta_l)$

ただし、$n = 2$のとき$\pi_2(\Delta_2^+)$は除く

$k \ge 2$の場合　$\pi_n(\Delta_n^+)$, $\pi_n(D(s,n))$ $(1 \le s \le k)$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$の場合は除き、

$n = 4$のとき$\pi_4(\Delta_4^+)$も除く

(3) $Sp(n)/\{\pm 1_n\}$のMASは次の何れかに共役

$$\pi_n(Q[8]\cdot D(s,n)) \qquad (0 \le s \le k)$$

ただし、$(s,n)=(k-1,2^k)$の場合は除く

定理 **1** で$\mu = 2$のとき、$\mathbb{Z}_\mu = \{\pm 1_n\}$, $\theta = \sqrt{-1}$で、
$U(n)/\{\pm 1_n\}$のMASは次の何れかに共役

$$\pi_n(\{1,\sqrt{-1}\}D(s,n)) \qquad (0 \le s \le k)$$

ただし、$(s,n)=(k-1,2^k)$の場合は除く

3. 分類の基本方針

G：コンパクト**Lie**群　　e：単位元

G_0：Gの単位連結成分

Mを$F(s_e, G) := \{g \in G \mid s_e(g) = g\}$の正次元の連結成分とする

$s_x|_M\ (x \in M)$はMの点対称になりMはコンパクト対称空間

$$M = \bigcup_{g \in G_0} gxg^{-1} = \bigcup_{g \in G_0} I_g(x)$$

$$I_0(M) = \{I_g|_M \mid g \in G_0\}$$

A：Mの極大対蹠集合

$A \cup \{e\}$はGの対蹠集合

$\tilde{A}$：$A \cup \{e\}$を含むGの極大対蹠部分群

$A = M \cap \tilde{A}$

$B_0, \ldots, B_k$：Gの極大対蹠部分群の各G_0共役類の代表

$0 \leq \exists s \leq k,\ \exists g \in G_0 \quad$ **s.t.** $\ \tilde{A} = I_g(B_s)$

$A = M \cap I_g(B_s) = I_g(M \cap B_s)$

AはM内で$M \cap B_s$と$I_0(M)$合同

Mの極大対蹠集合の$I_0(M)$合同類の代表の候補は

$$M \cap B_0, M \cap B_1, \ldots, M \cap B_k$$

4. $DIII(n)$とその商空間の極大対蹠集合

$$C := \{g \in SO(2n) \mid g^2 = -1_{2n}\}$$

$$= \left\{ g \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_1 \end{bmatrix} g^{-1} \,\middle|\, g \in SO(2n) \right\}$$

$$\cup \left\{ g \begin{bmatrix} -J_1 & & & \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_1 \end{bmatrix} g^{-1} \,\middle|\, g \in SO(2n) \right\}$$

$$J_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$DIII(n) := \{g\,\mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_1)\,g^{-1} \mid g \in SO(2n)\}$

$\cong SO(2n)/U(n)$（コンパクト型**Hermite**対称空間）

α： $\mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1) \in O(2n)$による共役

$C = DIII(n) \cup \alpha(DIII(n))$

X : $2n$次交代行列　Pf(X) : Xの**Pfaffian**

$\mathrm{Pf}(X) = 1 \quad (X \in DIII(n))$

$\mathrm{Pf}(X) = -1 \quad (X \in \alpha(DIII(n)))$

$\Gamma_n := \{\mathrm{diag}(\epsilon_1 J_1, \ldots, \epsilon_n J_1) \mid \epsilon_i = \pm 1, \epsilon_1 \cdots \epsilon_n = 1\}$

$\Gamma_n \subset DIII(n)$は対蹠集合

$\#_2 DIII(n) = 2^{n-1} = |\Gamma_n|$より$\Gamma_n$は$DIII(n)$の極大対蹠集合、合同を除いて唯一

定理 3 **(T.-田崎)** $DIII(n)$ の極大対蹠集合は次に合同

$$\{\mathrm{diag}(\epsilon_1 J_1, \ldots, \epsilon_n J_1) \mid \epsilon_i = \pm 1, \epsilon_1 \cdots \epsilon_n = 1\}$$

$SO(2n)^* := SO(2n)/\{\pm 1_{2n}\}$

$\pi_{2n} : SO(2n) \to SO(2n)^*$ 自然な射影

n が奇数の場合

-1_{2n} による積で $DIII(n)$ と $\alpha(DIII(n))$ は写り合う

$\pi_{2n}(DIII(n)) \cong DIII(n)$

$\underline{n\text{が偶数の場合}}$

-1_{2n}による積は$DIII(n), \alpha(DIII(n))$を各々保つ

$\pi_{2n}(DIII(n)) = DIII(n)/\{\pm 1_{2n}\}$

nが偶数のとき

$$DIII(n)^* := DIII(n)/\{\pm 1_{2n}\}$$

は$F(s_{1_{2n}^*}, SO(2n)^*)$の連結成分（$1_{2n}^* := \pi_{2n}(1_{2n})$）

Aを$DIII(n)^*$の極大対蹠集合とする

$2n = 2^k \cdot l$ (lは奇数) とすると$k \geq 2$

定理 **2**より$SO(2n)^*$の**MAS**の共役類の代表は

$\pi_{2n}(\Delta_{2n}^+)$, $\pi_{2n}(D(s, 2n))$ $(1 \leq s \leq k)$ **(**除外あり**)**

Aは次のいずれかに合同

$DIII(n)^* \cap \pi_{2n}(\Delta_{2n}^{+})$ **(除外あり)**

$DIII(n)^* \cap \pi_{2n}(D(s,2n))\ (1 \leq s \leq k)$ **(除外あり)**

$$DIII(n)^* \cap \pi_{2n}(\Delta_{2n}^{+}) = \emptyset$$

$$DIII(n)^* \cap \pi_{2n}(D(s,2n)) = \pi_{2n}(DIII(n) \cap D(s,2n))$$

$$DIII(n) \cap D(s,2n)$$

$$= \{d \in D(s,2n) \mid d\text{は}\,1_n \otimes J_1\,\text{に共役}\}$$

$$= \{d \in D(s,2n) \mid d^2 = -1_{2n},\ \mathrm{Pf}(d) = 1\}$$

$$= \{d \in ND(s,2n) \mid \mathrm{Pf}(d) = 1\}$$

ここで$ND(s,2n) := \{d \in D(s,2n) \mid d^2 = -1_{2n}\}$

$$I_1 := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

定理 4 **(T.-田崎)** $DIII(n)^*$（nは偶数）の極大対蹠集合は次の何れかに合同

(1) $n = 2$の場合

$$\{\pi_4(J_1 \otimes I_1), \pi_4(J_1 \otimes K_1), \pi_4(1_2 \otimes J_1)\}$$

(2) $n = 4$の場合

$$\{\pi_8(J_1 \otimes J_1 \otimes J_1)\} \cup$$
$$\{\pi_8(J_1 \otimes d_1 \otimes d_2), \pi_8(d_1 \otimes J_1 \otimes d_2), \pi_8(d_1 \otimes d_2 \otimes J_1)$$
$$\mid d_1, d_2 \in \{1_2, I_1, K_1\}\}$$

(3) $n = 4m + 2 \ (m \geq 1)$の場合

$\{\pi_{2n}(J_1 \otimes d) \mid d \in \Delta_n^-\}$,

$\{\pi_{2n}(J_1 \otimes d_1 \otimes d_0) \mid d_1 \in \{I_1, K_1\}, d_0 \in \Delta_{2m+1}\}$

$\cup\{\pi_{2n}(1_2 \otimes J_1 \otimes d_0) \mid d_0 \in \Delta_{2m+1}\}$

(4) $n = 4m \ (m \geq 2)$の場合

$\{\pi_{2n}(J_1 \otimes d) \mid d \in \Delta_n^+\}$,

$\pi_{2n}(ND(s, 2n)) \ (2 \leq s \leq k)$

ただし、$(s, 2n) = (k-1, 2^k)$の場合は除く

$DIII(2)^* \cong \mathbb{R}P^2$

$DIII(4)^* \cong G_2(\mathbb{R}^8)$