交叉積分公式の発展

広島幾何学研究集会 2008

田崎博之

2008 年 10 月 10 日

1　導入

交叉積分公式：三段階の発展

前段階：Steiner の公式 (19 世紀中葉)

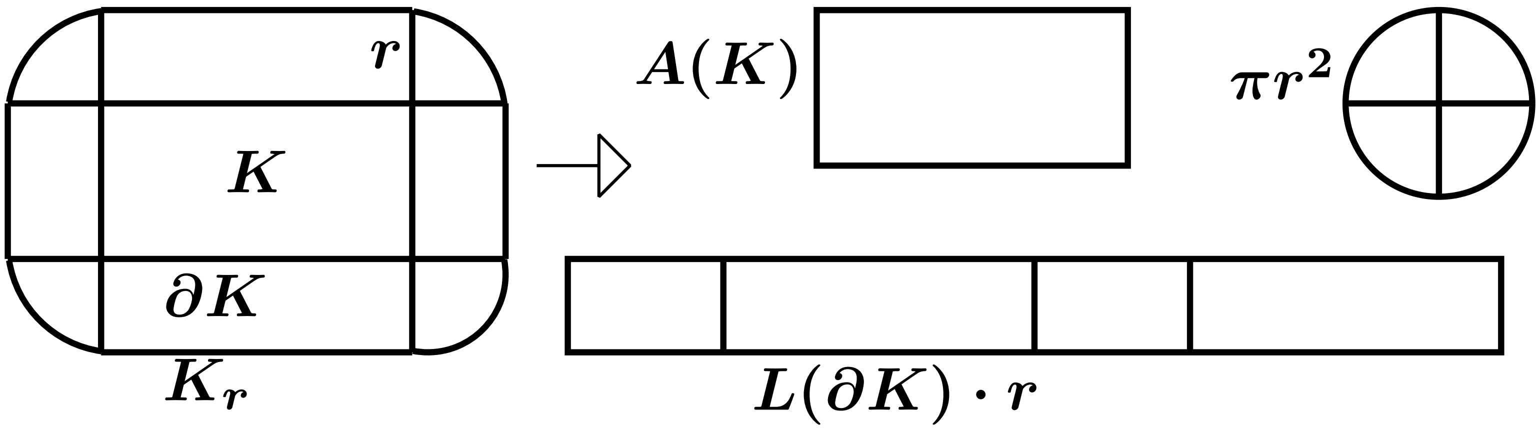
第一段階：交叉積分公式 (20 世紀初頭)

第二段階：不変量 (20 世紀中葉)

第三段階：代数構造 (21 世紀)

2　前段階：Steiner の公式

平面の場合



$$A(K_r) = A(K) + L(\partial K) \cdot r + \pi r^2$$

凸体：コンパクト凸集合

$\mathcal{K}^n$ ： $\mathbb{R}^n$ **内の凸体全体**

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{K} \in \mathcal{K}^n$ **に対して**

$$\boldsymbol{d(x, K) = \inf_{y \in K} d(x, y)}$$

$\boldsymbol{\rho} \geq 0$ **に対して**

$$\boldsymbol{K_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K) \leq \rho\}}$$

$\boldsymbol{K_\rho}$ **の体積** $\boldsymbol{V_n(K_\rho)}$ ： $\boldsymbol{\rho}$ **の多項式**

Steinerの公式

$$V_n(K_\rho) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \mu_{n-i}(K)\rho^i$$

μ_i：内在的体積、$\omega_i = V_i(B^i)$

1840年のSteinerの論文

$n = 2, 3$の特別な場合

以後拡張されて現在の形

$G_{\mathbb{R}}(n,i)$: Grassmann 多様体

$P_V : \mathbb{R}^n \to V$: 直交射影

$(V \in G_{\mathbb{R}}(n,i))$

内在的体積 μ_i の定義

$$\mu_i(K) = \int_{G_{\mathbb{R}}(n,i)} V_i(P_V(K))\, d\nu_i^n(V)$$

不変測度 ν_i^n の正規化：

$$\nu_i^n(G_{\mathbb{R}}(n,i)) = \frac{\omega_n}{\omega_i \omega_{n-i}} \binom{n}{i} =: \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$$

内在的体積の幾何学的意味

$\dim K = i \Rightarrow \mu_i(K)$: i 次元体積

$\boldsymbol{\mu}_n$: n 次元体積

$\boldsymbol{\mu}_{n-1}$: 表面積$/2$

$\boldsymbol{\mu}_{n-2}$: 表面の平均曲率の積分の定数倍
(滑らかな場合)

$\boldsymbol{\mu}_1$: 幅の積分の定数倍

$\boldsymbol{\mu}_0$: つねに1

3　第一段階：交叉積分公式

$M(\mathbb{R}^n) = SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$

主交叉積分公式　$K, L \in \mathcal{K}^n$ に対して

$$\int_{M(\mathbb{R}^n)} \mu_0(K \cap gL) d\nu^n(g)$$

$$= \sum_{i+j=n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}^{-1} \mu_i(K)\mu_j(L)$$

$M(\mathbb{R}^n)$ の Haar 測度 ν^n の正規化 $(A \subset \mathbb{R}^n)$：

$$\nu^n\{g \in M(\mathbb{R}^n) \mid g(0) \in A\} = V_n(A)$$

交叉積分公式　　$K, L \in \mathcal{K}^n$ **に対して**

$$\int_{M(\mathbb{R}^n)} \mu_k(K \cap gL) d\mu(g)$$

$$= \sum_{i+j=n+k} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ i-k \end{bmatrix}^{-1} \mu_i(K)\mu_j(L)$$

4　第二段階：不変量

Hausdorff 距離 δ の定義

$$\boldsymbol{\delta(K,L) = \max\left\{\sup_{x\in K} d(x,L), \sup_{y\in L} d(y,K)\right\}}$$

$(\boldsymbol{K,L \in \mathcal{K}^n})$

$\boldsymbol{\mu : \mathcal{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}}$：付値

$$\boldsymbol{K, L, K\cup L \in \mathcal{K}^n}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \mu(K\cup L) = \mu(K) + \mu(L) - \mu(K\cap L)}$$

付値μの次数i

$$\mu(rK) = r^i \mu(K) \quad (r \geq 0)$$

例　内在的体積μ_i：次数iの連続付値

$M(\mathbb{R}^n)$の$\mathcal{K}^n$への作用

$\Rightarrow$ 付値への作用

$\mathrm{Val}^{SO(n)}$：$M(\mathbb{R}^n)$不変連続付値全体

定理 (Hadwiger 1957)

$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$は$\mathrm{Val}^{SO(n)}$の基底

$$\int_{M(\mathbb{R}^n)} \mu_0(K \cap gL) d\nu^n(g)$$

$K, L \in \mathcal{K}^n$ に対して $\mathrm{Val}^{SO(n)}$ の元

Hadwiger の定理より、$\exists c_{i,j}$

$$\int_{M(\mathbb{R}^n)} \mu_0(K \cap gL) d\nu^n(g)$$

$$= \sum_{i,j} c_{i,j} \mu_i(K) \mu_j(L)$$

$K = B^n(r),\ L = B^n(s)$ 両辺計算 $\Rightarrow c_{i,j}$ 決定

5　第三段階：代数構造

$G \subset SO(n)$：コンパクト部分群

$\bar{G} = G \ltimes \mathbb{R}^n \subset M(\mathbb{R}^n)$

Val^G：$\bar{G}$ 不変連続付値全体

定理 (Alesker) G：S^{n-1} に推移的作用

$\Rightarrow \mathrm{Val}^G$：有限次元ベクトル空間

Val^G に可換階数付き実代数の構造

単位元は Euler 標数 χ $(= \mu_0)$

$\phi_1, \ldots, \phi_N$ ： Val^G の基底

$\phi \in \mathrm{Val}^G$ に対して、$\exists c_{ij}^{\phi}$

$$\int_{\bar{G}} \phi(K \cap \bar{g}L) d\mu(\bar{g})$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij}^{\phi} \phi_i(K) \phi_j(L)$$

さらに$\psi \in \mathrm{Val}^G$に対して

$$\int_{\bar{G}} (\psi \cdot \phi)(K \cap \bar{g}L) d\mu(\bar{g})$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij}^{\phi} (\psi \cdot \phi_i)(K) \phi_j(L)$$

主交叉積分公式の係数c_{ij}^{χ}、$\phi_k \cdot \phi_i$

$\Rightarrow$ すべての交叉積分公式

$SO(n)$の場合でも理解が深まる

ϕ：偶付値

$$\phi(-\boldsymbol{K}) = \phi(\boldsymbol{K}) \qquad (\boldsymbol{K} \in \mathcal{K}^n)$$

定理(Klain) ϕ：次数iの偶付値

$\forall \boldsymbol{E} \in \boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i})\ \exists \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{E}}\ \phi|_{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{i}}$

さらに$\mathrm{Kl}_\phi(E) = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{E}}$は$\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i})$上の連続関数

$$\{\text{次数}\,i\,\text{の偶付値}\} \xrightarrow{\mathrm{Kl}} C(\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i}))$$

は単射

定理 (T.) $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ ：同一視

$1 \leq k \leq n,\ p = [k/2]$

$E \in G_{\mathbb{R}}(2n, k)$ の多重 Kähler 角度

$\Theta(E) = (\theta_1(E), \ldots, \theta_p(E))$

: $U(n)$ 完全不変量

$n < k$ の場合は直交補空間を考える

曲面論の Kähler 角度の拡張

定理 (T.) $k \leq n$ $\exists T_{ij}^{k}$ ： **対称行列**

$A^k, B^{2n-k} \subset \mathbb{C}^n$ ： **部分多様体**

$$\int_{\overline{U(n)}} \#(A \cap \bar{g}B)\, d\bar{g}$$

$$= \sum_{ij} T_{ij}^{k} \int_{A} \sigma_i(\cos^2 \Theta(T_x A))\, dx$$

$$\cdot \int_{B} \sigma_j(\cos^2 \Theta(T_y B))\, dy$$

σ_i **第** i **次基本対称式**

Bernig-Fuは

$$\boldsymbol{\tau_{k,q}} \qquad \left(\mathbf{0} \le \boldsymbol{q} \le \boldsymbol{p} := \left[\frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{2}}\right]\right)$$

を次の条件式で定義

$$\mathrm{Kl}_{\boldsymbol{\tau_{k,q}}}(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{\sigma_q}(\cos^2 \boldsymbol{\theta_i}(\boldsymbol{E}))$$

定理 (Bernig-Fu)

$\boldsymbol{\tau_{k,q}}$ の全体は $\mathrm{Val}^{U(n)}$ の基底

$\boldsymbol{\tau_{k,q}}$ により $\overline{U(n)}$ 交叉積分公式を記述