鏡映部分多様体の幾何学

田崎博之

筑波大学大学院数理物質科学研究科

１ 序

２ 鏡映部分多様体

３ 擬Riemann多様体上の積分

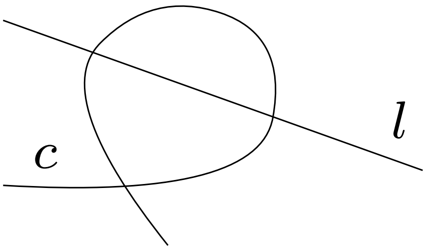
４ 鏡映部分多様体によるCroftonの公式

５ 複素空間形

1 序

Croftonの公式

$\mathcal{L}(\mathrm{R}^2)$ ： R^2 内の直線全体

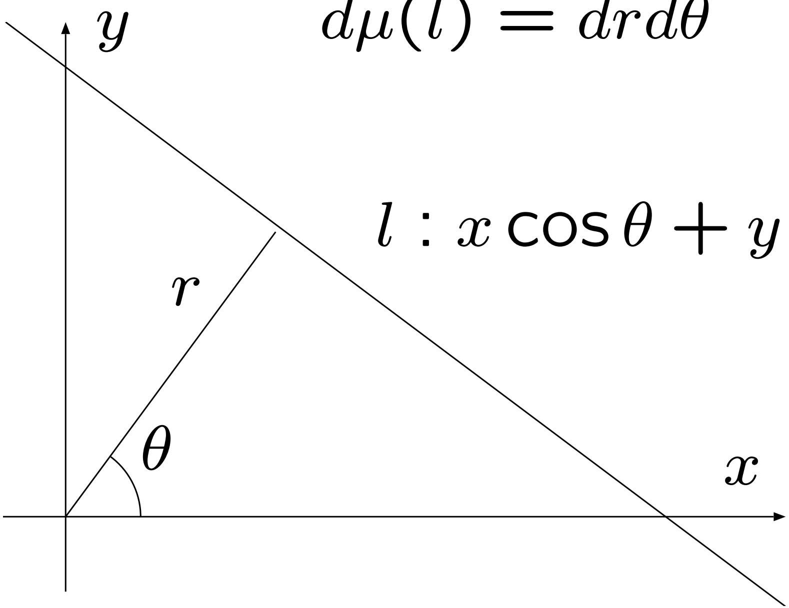


$$\mathcal{L}(\mathrm{R}^2) \ni l \mapsto \#(c \cap l)$$

： $\mathcal{L}(\mathrm{R}^2)$ 上の可測関数

$$\int_{\mathcal{L}(\mathrm{R}^2)} \#(c \cap l) d\mu(l) = 2L(c)$$

$$d\mu(l) = dr d\theta$$



$$l : x \cos\theta + y \sin\theta = r$$

G ： R^n の等長変換全体の群の単位連結成分

B ： R^n 内の l 次元平面

$$\mathcal{R}(B) = \{gB \mid g \in G\}$$

$\mathcal{R}(B)$ は対称空間の構造と G 不変測度を持つ。

$k+l \geq n$ に対してある定数 σ が存在し、

$$\int_{\mathcal{R}(B)} \mathrm{vol}(N \cap C) d\mu(C) = \sigma \mathrm{vol}(N)$$

が R^n 内の k 次元部分多様体 N に対して成り立つ。

Riemann対称空間内の鏡映部分多様体による拡張されたCroftonの公式

2 鏡映部分多様体

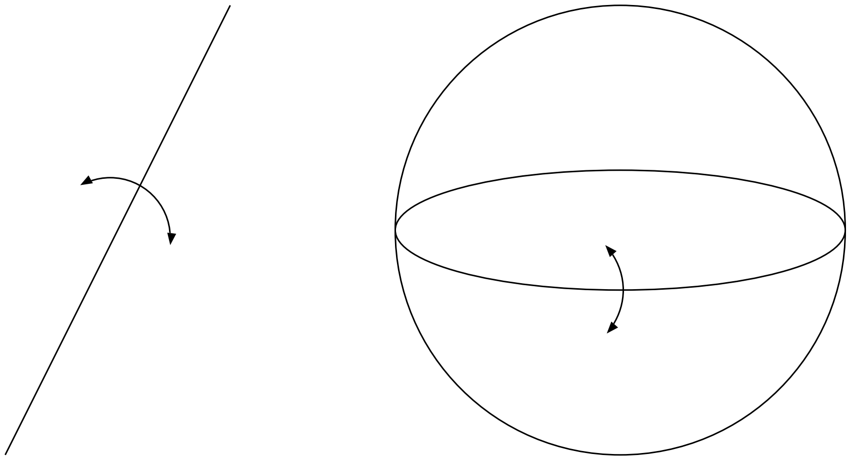
鏡映部分多様体（Leung)

: Riemann多様体の対合的等長変換の
　不動点集合の連結成分

鏡映部分多様体 $\Rightarrow$ 全測地的部分多様体

Riemann対称空間内の鏡映部分多様体

: 分類（Leung)



多様体M ： 対称空間

$\Leftrightarrow$ 各$x \in M$に対して微分同型s_xが存在し

(1) xはs_xの孤立不動点

(2) s_xは対合的、すなわち$s_x^2 = 1$

(3) $s_x(s_y(z)) = s_{s_x(y)}(s_x(z))$ $(y, z \in M)$

M ： (擬)Riemann対称空間

$\Leftrightarrow$ M ： (擬)Riemann多様体、各s_xは等長変換

定理 2.1 M ： Riemann対称空間

G ： M の等長変換群の単位連結成分

B ： M の鏡映部分多様体

$\mathcal{R}(B) = \{gB \mid g \in G\}$

$\Rightarrow \mathcal{R}(B)$ は対称空間の構造を持つ

M ： コンパクト型

$\Rightarrow \mathcal{R}(B)$ ： コンパクト型Riemann対称空間

M ： 非コンパクト型

$\Rightarrow \mathcal{R}(B)$ ： 擬Riemann対称空間

3 擬Riemann多様体上の積分

V ： 有限次元ベクトル空間、$\langle\ ,\ \rangle$ ： 内積

$e_1, \ldots e_n$ ： 正規直交基底$\Leftrightarrow \langle e_i, e_j\rangle = \pm\delta_{ij}$

V の内積 $\to$ $\wedge^p V$ の内積

$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ ： $\wedge^p V$ の正規直交基底

$u_i, v_j \in V$ に対して

$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p\rangle = \det[\langle u_i, v_j\rangle]$

補題 3.1 $m \geq n$

V, W : m, n次元実ベクトル空間、内積を持つ

$F : V \to W$: 線形写像

F : 全射ではない $\Rightarrow$ $JF = 0$と定める

F : 全射、$\langle\ ,\ \rangle$: $\ker F$上で非退化

$v_1, \ldots, v_n$: $(\ker F)^{\perp}$の基底

$\Rightarrow JF = \dfrac{|F(v_1) \wedge \cdots \wedge F(v_n)|}{|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n|}$: v_iの選び方に依存しない

M ： **擬Riemann多様体**

$(x_1, \ldots, x_n)$ ： M **の局所座標系**

$$d\mu = |\partial/\partial x_1 \wedge \cdots \wedge \partial/\partial x_n| dx_1 \cdots dx_n$$
$$= |\det[\langle \partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j \rangle]|^{1/2} dx_1 \cdots dx_n$$

局所座標系のとり方によらない

M **上の測度** μ **が定まる**

M **の等長変換は体積を保存する**

定理 3.2(余面積公式) $m \geq n$

M, N **:** m, n **次元擬Riemann多様体**

$f : M \to N$ **:** C^∞ **級写像**

$f^{-1}(y)$ **の誘導計量は非退化(a. a.** $y \in N$**)**

ϕ **:** M **上の可測関数** $\phi \geq 0$

$$\Rightarrow \quad \int_N \left(\int_{f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu(x) \right) d\mu_N(y)$$

$$= \int_M \phi(x) J df_x d\mu_M(x)$$

4 鏡映部分多様体によるCroftonの公式

M ： Riemann対称空間 ($= G/K$)

B ： M の鏡映部分多様体

$\mathcal{R}_0(B) = \{kT_oB \mid k \in K\}$

部分ベクトル空間 $V \subset T_oM$ に対して

$$\sigma_B(V) = \int_{\mathcal{R}_0(B)} |\vec{V}^\perp \wedge \vec{\mathfrak{c}}^\perp| d\mu(\mathfrak{c}).$$

定理 4.1

M ： Riemann対称空間

コンパクト型または非コンパクト型

B ： M の鏡映部分多様体

M の部分多様体 N が $\dim N + \dim B \geq \dim M$ を満たすとき

$$\int_{\mathcal{R}(B)} \mathrm{vol}(N \cap C) d\mu(C) = \int_N \sigma_B(T_x N) d\mu(x).$$

証明の概略

$$I(N) = \{(x, C) \in N \times \mathcal{R}(B) \mid x \in C\}$$

：擬Riemann多様体の構造を持つ

$$f : I(N) \to \mathcal{R}(B)\ ;\ (x, C) \mapsto C$$

は余面積公式の前提条件を満たし、余面積公式を適用するとCroftonの公式を得る

系 4.2

$M = G/SO(n)$ ： n次元実空間形

B ： l次元全測地的部分多様体

$k+l \geq n$とするとMのk次元部分多様体Nに対して

$$\int_{\mathcal{R}(B)} \mathrm{vol}(N \cap C) d\mu(C) = \frac{\mathrm{vol}(S^{k+l-n})}{\mathrm{vol}(S^k)} \mathrm{vol}(\mathcal{R}(S^l)) \mathrm{vol}(N).$$

5 複素空間形

定義 5.1 $1 < k \leq n$

V ： $\mathbf{C}^n$ 内の実 k 次元部分ベクトル空間

$\exists \alpha^1, \ldots, \alpha^k$ ： V^* の正規直交基底

$$\omega|_V = \sum_{i=1}^{[k/2]} \cos\theta_i \alpha^{2i-1} \wedge \alpha^{2i}, \qquad (\theta_i \leq \theta_{i+1})$$

$\theta(V) = \left(\theta_1, \ldots, \theta_{[k/2]}\right)$ ： V の**多重Kähler角度**

定理 5.2

V, W : $\mathbf{C}^n$ **内の実部分ベクトル空間、** $\dim V = \dim W$

$$\theta(V) = \theta(W) \Leftrightarrow \exists u \in U(n)\ W = uV$$

多重Kähler角度 : ユニタリ群の作用に関する実部分ベクトル空間の完全不変量

定理 5.3 (Leung) $\mathbf{C}P^n$ **内の鏡映部分多様体**

: $\mathbf{C}P^k\ (1 \leq k < n)$, $\mathbf{R}P^n$.

系 5.4

$M = G/S(U(n) \times U(1))$ ： 複素 n 次元複素空間形

$k, 2l < 2n \leq k + 2l \qquad \exists \sigma^n_{k,l}(\theta^{(k)})$

B^l ： M 内の複素 l 次元全測地的部分多様体

N ： M 内の実 k 次元部分多様体

$$\int_{\mathcal{R}(B^l)} \mathrm{vol}(N \cap C)\, d\mu(C) = \int_N \sigma^n_{k,l}(\theta(T_x N))\, d\mu(x).$$

$k < 2n \leq k + n \qquad \exists \tau_k^n(\theta^{(k)})$

L ： M 内の全測地的Lagrange部分多様体

N ： M 内の実 k 次元部分多様体

$$\int_{\mathcal{R}(L)} \mathrm{vol}(N \cap C) d\mu(C) = \int_N \tau_k^n(\theta(T_x N)) d\mu(x).$$

系 5.5 $k+l \geq n$

$M = G/S(U(n) \times U(1))$： 複素$n$次元複素空間形

B ： M内の複素l次元全測地的部分多様体

N ： Mの複素k次元部分多様体

$$\int_{\mathcal{R}(B)} \mathrm{vol}(N \cap C) d\mu(C)$$

$$= \frac{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^{k+l-n})}{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^k)} \mathrm{vol}(\mathcal{R}(\mathbf{C}P^l))\mathrm{vol}(N).$$

系 5.6

$M=G/S(U(n)\times U(1))$ ： **複素** n **次元複素空間形**

B ： M **内の複素** $n-1$ **次元全測地的部分多様体**

N ： M **の実２次元部分多様体、** θ_x ： **Kähler角度**

$$\int_{\mathcal{R}(B)} \#(N\cap C)d\mu(C) = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{R}(\mathbf{C}P^{n-1}))}{2\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^1)} \int_N (1+\cos^2\theta_x)d\mu(x).$$