群作用と交叉積分公式

横田先生叙勲 記念研究集会
「リー群と関連分野」

田崎博之

2008 年 10 月 19 日

1　交叉積分公式

凸体：コンパクト凸集合

$\mathcal{K}^n$ **：** $\mathbb{R}^n$ **内の凸体全体**

$\mu_i : \mathcal{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ **：内在的体積**

ω_i **：** i **次元単位球体の** i **次元体積**

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = \frac{\omega_n}{\omega_i \omega_{n-i}} \binom{n}{i}$$

内在的体積の幾何学的意味

$\dim K = i \Rightarrow \mu_i(K)$: i 次元体積

$\boldsymbol{\mu}_n$: n 次元体積

$\boldsymbol{\mu}_{n-1}$: 表面積$/2$

$\boldsymbol{\mu}_{n-2}$: 表面の平均曲率の積分の定数倍
(滑らかな場合)

$\boldsymbol{\mu}_1$: 幅の積分の定数倍

$\boldsymbol{\mu}_0$: つねに 1

$M(\mathbb{R}^n) = SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$

主交叉積分公式 $K, L \in \mathcal{K}^n$ **に対して**

$$\int_{M(\mathbb{R}^n)} \mu_0(K \cap gL)\,d\nu^n(g)$$

$$= \sum_{i+j=n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}^{-1} \mu_i(K)\mu_j(L)$$

$M(\mathbb{R}^n)$ **の** Haar **測度** ν^n **の正規化** $(A \subset \mathbb{R}^n)$ **:**

$$\nu^n\{g \in M(\mathbb{R}^n) \mid g(0) \in A\} = V_n(A)$$

交叉積分公式 $\boldsymbol{K, L \in \mathcal{K}^n}$ **に対して**

$$\int_{M(\mathbb{R}^n)} \boldsymbol{\mu_k(K \cap gL) d\mu(g)}$$

$$= \sum_{i+j=n+k} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ i-k \end{bmatrix}^{-1} \boldsymbol{\mu_i(K)\mu_j(L)}$$

2　不変連続付値

Hausdorff 距離 δ の定義

$$\delta(K,L) = \max\left\{\sup_{x\in K} d(x,L), \sup_{y\in L} d(y,K)\right\}$$

$(K, L \in \mathcal{K}^n)$

$\mu : \mathcal{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}$: 付値

$$K, L, K\cup L \in \mathcal{K}^n$$

$$\Rightarrow \mu(K\cup L) = \mu(K) + \mu(L) - \mu(K\cap L)$$

付値 μ の次数 i

$$\mu(rK) = r^i \mu(K) \quad (r \geq 0)$$

例　内在的体積 μ_i：次数 i の連続付値

$M(\mathbb{R}^n)$ の $\mathcal{K}^n$ への作用

$\Rightarrow$ 付値への作用

$\mathrm{Val}^{SO(n)}$：$M(\mathbb{R}^n)$ 不変連続付値全体

定理 (Hadwiger 1957)

$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ は $\mathrm{Val}^{SO(n)}$ の基底

3　代数構造

$G \subset SO(n)$：コンパクト部分群

$\bar{G} = G \ltimes \mathbb{R}^n \subset M(\mathbb{R}^n)$

Val^G：$\bar{G}$ 不変連続付値全体

定理 (Alesker) G：S^{n-1} に推移的作用

$\Rightarrow \mathrm{Val}^G$：有限次元ベクトル空間

Val^G に可換階数付き実代数の構造

単位元は Euler 標数 χ $(= \mu_0)$

$\phi_1, \ldots, \phi_N$: Val^G の基底

$\phi \in \mathrm{Val}^G$ に対して、$\exists c_{ij}^{\phi}$

$$\int_{\bar{G}} \phi(K \cap \bar{g}L) d\mu(\bar{g})$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij}^{\phi} \phi_i(K) \phi_j(L)$$

さらに$\psi \in \mathrm{Val}^G$に対して

$$\int_{\bar{G}} (\psi \cdot \phi)(K \cap \bar{g}L) d\mu(\bar{g})$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij}^{\phi} (\psi \cdot \phi_i)(K) \phi_j(L)$$

主交叉積分公式の係数c_{ij}^{χ}、$\phi_k \cdot \phi_i$

$\Rightarrow$ すべての交叉積分公式

$SO(n)$の場合でも理解が深まる

$G = U(n)$ の場合

$e_1, \ldots, e_n$: $\mathbb{C}^n$ の標準的ユニタリ基底

$k \leq n$ に対して $(p = [k/2])$

$\exists T \subset G_k^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) : p$ 次元平坦トーラス

任意の $V \in G_k^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$

$$U(n) \cdot V \cap \Delta T : \text{一点}$$

$$\Delta T : 0 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_p \leq \pi/2$$

$$(\theta_i) : V \text{ の多重 Kähler 角度}$$

定理 (T.) $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$: 同一視

$1 \leq k \leq n$, $p = [k/2]$

$E \in G_{\mathbb{R}}(2n, k)$ の多重 Kähler 角度

$\theta(E) = (\theta_1(E), \ldots, \theta_p(E))$

: $U(n)$ 完全不変量

$n < k$ の場合は直交補空間を考える

曲面論の Kähler 角度の拡張

定理 (T.) $k \le n$ $\exists T^k_{ij}$: 対称行列

$A^k, B^{2n-k} \subset \mathbb{C}^n$: 部分多様体

$$\int_{\overline{U(n)}} \#(A \cap \bar{g}B)\, d\bar{g}$$

$$= \sum_{ij} T^k_{ij} \int_A \sigma_i(\cos^2 \Theta(T_x A))\, dx$$

$$\cdot \int_B \sigma_j(\cos^2 \Theta(T_y B))\, dy$$

σ_i 第 i 次基本対称式

ϕ：偶付値

$$\phi(-K) = \phi(K) \qquad (K \in \mathcal{K}^n)$$

定理(Klain) ϕ：次数iの偶付値

$\forall E \in G_{\mathbb{R}}(n,i)\ \exists c_E\ \phi|_E = c_E V_i$

さらに$\mathrm{Kl}_\phi(E) = c_E$は$G_{\mathbb{R}}(n,i)$上の連続関数

$$\{\text{次数}\,i\,\text{の偶付値}\} \xrightarrow{\mathrm{Kl}} C(G_{\mathbb{R}}(n,i))$$

は単射

Bernig-Fu は

$$\boldsymbol{\tau_{k,q}} \quad \left(\mathbf{0} \leq \boldsymbol{q} \leq \boldsymbol{p} := \left[\frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{2}}\right]\right)$$

を次の条件式で定義

$$\mathrm{Kl}_{\boldsymbol{\tau_{k,q}}}(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{\sigma_q}(\cos^2 \boldsymbol{\theta_i}(\boldsymbol{E}))$$

定理 (Bernig-Fu)

$\boldsymbol{\tau_{k,q}}$ の全体は $\mathrm{Val}^{U(n)}$ の基底

$\boldsymbol{\tau_{k,q}}$ により $\overline{U(n)}$ 交叉積分公式を記述