弱鏡映軌道と austere 軌道の分類

井川治　福島高専一般教科
酒井高司　大阪市立大学理学研究科
田崎博之　筑波大学数理物質科学研究科

2006 年春の学会で Riemann 多様体の鏡映部分多様体と austere 部分多様体の中間概念になる弱鏡映部分多様体の概念を提起し、これら部分多様体の基本的性質について発表した。今回は Riemann 対称対の線形イソトロピー表現の軌道のうちで、超球面内で弱鏡映になるものと austere になるものの分類結果を発表する。

X を完備 Riemann 多様体とする。X の対合的等長変換の固定点集合の連結成分を**鏡映部分多様体**という。この概念は Leung [2] が導入した。この鏡映部分多様体の概念を少し弱めて、次の定義を与える。

定義 1 X を Riemann 多様体、M を X の部分多様体とする。各点 $x \in M$ における法ベクトル $\xi \in T_x^\perp M$ に対して次の条件を満たす X の等長変換 σ_ξ が存在するとき、M を**弱鏡映部分多様体**という。

$$\sigma_\xi(x) = x, \qquad (d\sigma_\xi)_x \xi = -\xi, \qquad \sigma_\xi(M) = M.$$

X を Riemann 多様体、M を X の部分多様体とし、M のシェイプ作用素を A で表わす。M の任意の点の任意の法ベクトル ξ に対して A_ξ の固有値が -1 倍に関して不変であり、-1 倍で対応する固有値の重複度が等しいとき、M を **austere 部分多様体**という。この概念は Harvey-Lawson [1] が導入した。

鏡映部分多様体、弱鏡映部分多様体、austere 部分多様体、極小部分多様体の間には次の関係がある。

$$\text{鏡映} \Rightarrow \text{弱鏡映} \Rightarrow \text{austere} \Rightarrow \text{極小}$$

命題 2 Riemann 多様体の余等質性 1 の等長変換群の特異軌道は弱鏡映部分多様体になる。

命題 2 は Podestà[3] の論法より得られる。

命題 3 完備連結 Riemann 多様体の余等質性 1 の連結等長変換群が二つの特異軌道を持っていると仮定する。もし弱鏡映主軌道が存在すれば、それは二つの特異軌道から等しい距離にあり、二つの特異軌道は等長的になる。

弱鏡映部分多様体と austere 部分多様体の関係を見るために、既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー表現の軌道について調べ、これらを分類した。

定理 4 既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー表現の軌道であって、超球面内の austere 部分多様体となるものは次の制限ルート系における指定したベクトルを通る軌道に限られる。

(1) 制限ルート

(2) 制限ルート系 A_2 型 $\{\pm(e_i - e_j)\}$ のベクトル $2e_1 - e_2 - e_3, e_1 + e_2 - 2e_3$

(3) 制限ルート系 A_3 型 $\{\pm(e_i - e_j)\}$ のベクトル $e_1 + e_2 - e_3 - e_4$

(4) 制限ルート系 D 型 $\{\pm e_i \pm e_j\}$ のベクトル e_1

(5) 制限ルート系 D_4 型 $\{\pm e_i \pm e_j\}$ のベクトル $e_1 + e_2 + e_3 \pm e_4$

(6) 重複度一定の制限ルート系 B_2 型 $\{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j\}$ のベクトル $e_1 + \frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}$ (主軌道)

(7) 制限ルート系 G_2 型のベクトル $\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{3}}$ (主軌道)

定理 5 既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー表現の軌道であって、超球面内の弱鏡映部分多様体となるものは定理 4 の分類結果から (6) と (7) を除いたものに限られる。

軌道が弱鏡映になることは、Weyl 群の作用や命題 2 を利用して得られる。(6) と (7) が除外されることは命題 3 を利用してわかる。

参考文献

[1] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., Calibrated geometries, Acta Math., **148** (1982), 47–157.

[2] Dominic S. P. Leung, The reflection principle for minimal submanifolds of Riemannian symmetric spaces, J. Differential Geometry, **8** (1973), 153 – 160.

[3] F. Podestà, Some remarks on austere submanifolds, Boll. Un. Mat. Ital. B(7) **11** (1997), no.2, suppl., 157–160.