弱鏡映軌道と
austere軌道の分類

井川治　　福島高専
酒井高司　大阪市立大学
田崎博之　筑波大学

鏡映部分多様体(Leung)

：　Riemann多様体の対合的等長変換(鏡映)の固定点集合の連結成分

M **：　鏡映部分多様体**　σ **：**　M**の鏡映**

$\forall x \in M \ \ \forall \xi \in T_x^{\perp} M$

$$\sigma(x) = x, \ (d\sigma)_x \xi = -\xi,$$

$$\sigma(M) = M$$

$M \subset X \quad \forall x \in M \quad \forall \xi \in T_x^{\perp} M$

$\exists \sigma : X \to X$ ： **等長変換**

$$\sigma(x) = x,\ (d\sigma)_x \xi = -\xi,$$
$$\sigma(M) = M$$

M ： **弱鏡映部分多様体**

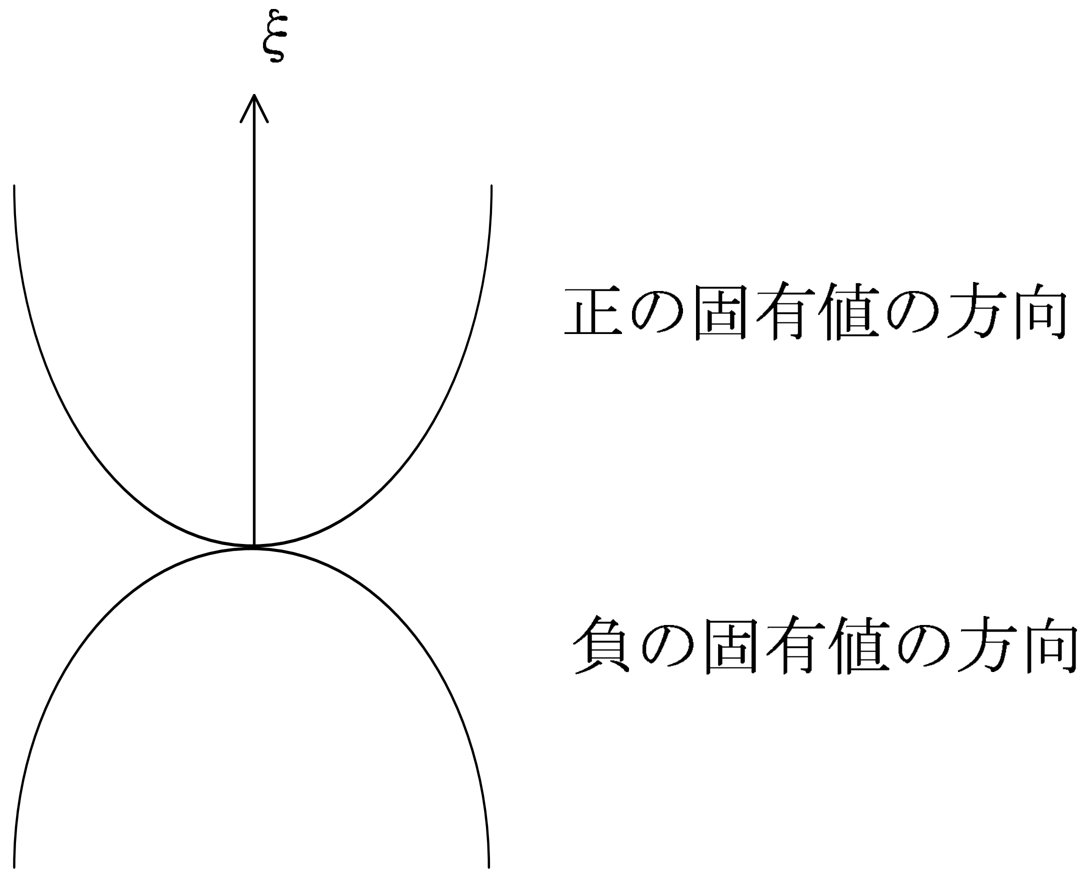
$M \subset X \quad \forall x \in M \quad \forall \xi \in T_x^{\perp} M$

A_ξ**の固有値：**-1**倍不変**

M **：austere部分多様体**

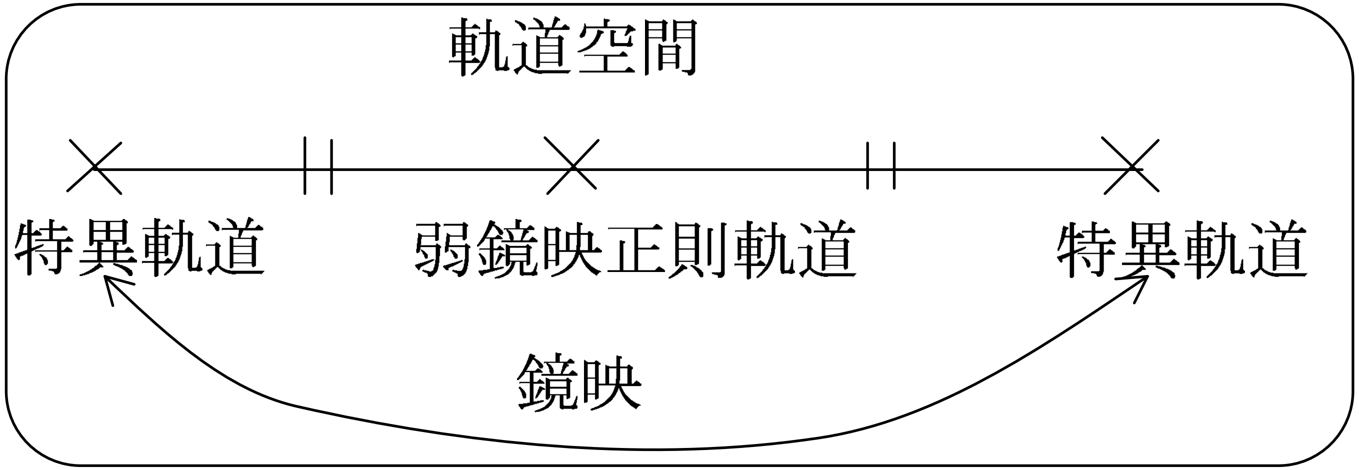
(Harvey-Lawson)

鏡映 $\Rightarrow$ **弱鏡映** $\Rightarrow$ **austere** $\Rightarrow$ **極小**


ξ
正の固有値の方向
負の固有値の方向

Riemann多様体の余等質性１の等長変換群の特異軌道$\Rightarrow$ 弱鏡映

Podestàの論法より得られる。



いい性質を持つ部分多様体の構成法

(G, K) ： Riemann対称対

$\mathcal{G} = \mathcal{K} + \mathcal{M}$ ： Lie代数の標準分解

$H \in \mathcal{M}$ $(\neq 0)$

$\mathrm{Ad}_G(K)H$ ： 超球面の部分多様体

軌道の分類　(G,K)が既約の場合

$\mathrm{Ad}_G(K)H$がaustere部分多様体になるH

(1) 制限ルート

(2) A_2型$\{\pm(e_i - e_j)\}$の$2e_1 - e_2 - e_3, e_1 + e_2 - 2e_3$

(3) A_3型$\{\pm(e_i - e_j)\}$の$e_1 + e_2 - e_3 - e_4$

(4) D型$\{\pm e_i \pm e_j\}$のe_1

(5) D_4型$\{\pm e_i \pm e_j\}$の$e_1 + e_2 + e_3 \pm e_4$

(6) 重複度一定のB_2型$\{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j\}$の$e_1 + \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}$

(7) G_2型の$\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{3}}$

$\mathrm{Ad}_G(K)H$ が弱鏡映部分多様体になる H

(1) **制限ルート**

(2) A_2 **型** $\{\pm(e_i - e_j)\}$ **の** $2e_1 - e_2 - e_3, e_1 + e_2 - 2e_3$

(3) A_3 **型** $\{\pm(e_i - e_j)\}$ **の** $e_1 + e_2 - e_3 - e_4$

(4) D **型** $\{\pm e_i \pm e_j\}$ **の** e_1

(5) D_4 **型** $\{\pm e_i \pm e_j\}$ **の** $e_1 + e_2 + e_3 \pm e_4$

$f : M^l \to S^n$ はめこみ

Gauss写像$\gamma : M \to G_{l+1}(\mathbf{R}^{n+1})$

$$\gamma(x) = \mathbf{R}f(x) \oplus T_{f(x)}(f(M))$$

軌道のGauss写像退化 $\Rightarrow$ 弱鏡映

$$\left.\begin{array}{l}\text{長い制限ルートの軌道}\\ G_2\text{型の短いルートの軌道}\end{array}\right\} : \text{Gauss写像退化}$$