Gauss 写像の退化する軌道と弱鏡映軌道

筑波大学数理物質科学研究科　田崎博之

この研究は井川治 (福島高専)、酒井高司 (大阪市大) との共同研究である。

第二基本形式が対称性を持つということで定義される Harvey-Lawson[2] の提起した austere 部分多様体が超球面内にどの程度存在するのか見るために、既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー作用の軌道が球面内で austere 部分多様体になるための条件を制限ルート系に関する条件で記述し、この条件を満たす軌道をすべて求めて詳しく調べてみると、austere 軌道のいくつかは法ベクトルの方向に裏返す等長変換に関して不変になるという大域的な性質を持つことに気付いた。この性質は Leung[7] の提起した鏡映部分多様体の条件を弱くした条件になっていて、余等質性 1 の等長変換群の作用の特異軌道が austere になることを示した Podestà[8] の論法とも関係がある。そこで、この性質を持つ部分多様体を弱鏡映部分多様体と名付け、その基本的性質を調べ始めた。既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー作用の軌道のうちで、超球面内で弱鏡映になるものと austere になるものの分類結果を論文 [4] で発表した。今回はこれまでのこのような結果に加えて、さらに Gauss 写像の退化する軌道の分類結果と弱鏡映軌道との関係について発表する。

定義 1 X を Riemann 多様体、M を X の部分多様体とする。各点 $x \in M$ における法ベクトル $\xi \in T_x^\perp M$ に対して次の条件を満たす X の等長変換 σ_ξ が存在するとき、M を**弱鏡映部分多様体**という。

$$\sigma_\xi(x) = x, \qquad (d\sigma_\xi)_x \xi = -\xi, \qquad \sigma_\xi(M) = M.$$

弱鏡映部分多様体の定義の元になった鏡映部分多様体は次のように定義される。X を完備 Riemann 多様体とする。X の対合的等長変換の固定点集合の連結成分を**鏡映部分多様体**という。この概念は Leung [7] が導入した。鏡映部分多様体は完備全測地的部分多様体になることがわかる。鏡映部分多様体を定める対合的等長変換は鏡映部分多様体に対して一意的に定まる。そこでこの一意的に定まる対合的等長変換をその鏡映部分多様体の**鏡映**と呼ぶことにする。M を X の鏡映部分多様体とし、σ_M を M の鏡映とする。各点 $x \in M$ における法ベクトル $\xi \in T_x^\perp M$ 対して

$$\sigma_M(x) = x, \qquad (d\sigma_M)_x \xi = -\xi, \qquad \sigma_M(M) = M$$

が成り立つ。この性質を利用して弱鏡映部分多様体の定義を与えた。鏡映部分多様体の場合は任意の $y \in M$ に対して $\sigma_M(y) = y$ が成り立っているが、弱鏡映部分多様体の場合にはそのような等長変換があるとは限らない。

次に Harvey-Lawson [2] が導入した austere 部分多様体の概念を紹介しておく。X を Riemann 多様体、M を X の部分多様体とし、M のシェイプ作用素を A で表

す。M の任意の点の任意の法ベクトル ξ に対して A_ξ の固有値の全体が -1 倍に関して不変であり、-1 倍で対応する固有値の重複度が等しいとき、M を **austere 部分多様体**という。

鏡映部分多様体、弱鏡映部分多様体、austere 部分多様体、極小部分多様体の間には次の関係があることがわかる。

$$\text{鏡映} \Rightarrow \text{弱鏡映} \Rightarrow \text{austere} \Rightarrow \text{極小}$$

鏡映部分多様体が弱鏡映部分多様体になることは、定義からわかる。弱鏡映部分多様体が austere 部分多様体になることは、法ベクトルに対して定まる鏡映の微分写像がシェイプ作用素の固有空間を -1 倍した固有値の固有空間に写すことからわかる。Austere 部分多様体が極小部分多様体になることは、各法ベクトルのシェイプ作用素の正の固有値と負の固有値が重複度を込めて対応しているので、固有値をすべて加えると 0 になることからわかる。

弱鏡映部分多様体の例を示しておく。

$$M = S^{n-1}(1) \times S^{n-1}(1) = \{(x, y) \mid x, y \in S^{n-1}(1)\}$$

とおくと、M は $\mathbf{R}^{2n}$ 内の半径 $\sqrt{2}$ の $2n-1$ 次元球面 $S^{2n-1}(\sqrt{2})$ の弱鏡映部分多様体になる。M は $S^{2n-1}(\sqrt{2})$ の等質部分多様体なので、弱鏡映部分多様体の条件を M の一点で確かめればよい。

$$x = (1, 0, \ldots, 0, \overset{n+1}{\breve{1}}, 0, \ldots, 0) \in M$$

に対して、

$$\begin{aligned} \sigma(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) &= (y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n) \\ &\quad ((x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in S^{2n-1}(\sqrt{2})) \end{aligned}$$

によって $S^{2n-1}(\sqrt{2})$ の等長変換 σ を定める。$\sigma(x) = x$ となり、σ の x における微分写像 $d\sigma_x$ は M の $S^{2n-1}(\sqrt{2})$ 内の法ベクトル空間

$$T_x^\perp(M) = \mathbf{R}(-1, 0, \ldots, 0, \overset{n+1}{\breve{1}}, 0, \ldots, 0)$$

では -1 倍になり、$\sigma(M) = M$ が成り立つことがわかる。これより、M は $S^{2n-1}(\sqrt{2})$ 内の弱鏡映部分多様体になる。$n = 2$ の場合は Clifford torus と呼ばれている 3 次元球面内の極小曲面に一致している。上の計算では第二基本形式を計算する必要がないので、簡単に Clifford torus が極小曲面であることを確認できる。

弱鏡映部分多様体と austere 部分多様体の関係を見るために、既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー表現の軌道について調べ、これらを分類した。その結果を述べるために、この表現の軌道に関する基本的事項を簡単に復習しておく。

(G,K) を既約 Riemann 対称対とし、(G,K) の定める G の対合的自己同型写像を θ で表す。G,K の Lie 代数をそれぞれ $\mathfrak{g},\mathfrak{k}$ で表す。$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ を Riemann 対称対 (G,K) に対応する $\mathfrak{g}$ の標準分解とする。$\mathfrak{g}$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を θ と G の随伴群の作用に関して不変になるようにとる。

対称対が既約であることから、K の $\mathfrak{m}$ への作用は既約になる。$\mathfrak{m}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとり固定する。$\lambda\in\mathfrak{a}$ に対して，$\mathfrak{m},\mathfrak{k}$ それぞれの部分空間 $\mathfrak{m}_\lambda,\mathfrak{k}_\lambda$ を

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{m}_\lambda &= \{X\in\mathfrak{m}\mid [H,[H,X]]=-\langle\lambda,H\rangle^2X \quad (X\in\mathfrak{a})\},\\
\mathfrak{k}_\lambda &= \{X\in\mathfrak{k}\mid [H,[H,X]]=-\langle\lambda,H\rangle^2X \quad (X\in\mathfrak{a})\}
\end{aligned}
$$

と定める。このとき、$\mathfrak{m}_\lambda$ と $\mathfrak{k}_\lambda$ は線形同型になる。$R=\{\lambda\in\mathfrak{a}\mid\mathfrak{m}_\lambda\neq\{0\}\}$ によって $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ の制限ルート系 R を定める。R の基本系を F とし、F に関する正の制限ルート全体の集合を R_+ と表す。このとき、直交直和分解

$$
\mathfrak{k}=\mathfrak{k}_0+\sum_{\alpha\in R_+}\mathfrak{k}_\alpha,\quad \mathfrak{m}=\mathfrak{a}+\sum_{\alpha\in R_+}\mathfrak{m}_\alpha \qquad \text{ただし } \mathfrak{k}_0=\{X\in\mathfrak{k}\mid [X,\mathfrak{a}]=0\}
$$

が得られる ([3])。任意の部分集合 $\Delta\subset F$ に対して

$$
\begin{aligned}
&C^\Delta=\{H\in\mathfrak{a}\mid\langle\alpha,H\rangle>0\ (\alpha\in\Delta),\ \langle\beta,H\rangle=0\ (\beta\in F-\Delta)\},\\
&R^\Delta=R\cap(F-\Delta)_{\mathbf{Z}},\quad R^\Delta_+=R^\Delta\cap R_+
\end{aligned}
$$

とおく。$H\in C^\Delta$ に対して $R^\Delta=\{\alpha\in R\mid\langle\alpha,H\rangle=0\}$ となる。さらに、

$$
\bar{C}^F=\bigcup_{\Delta\subset F}C^\Delta
$$

となり、右辺の和は直和になる。K の作用による任意の軌道は $\bar{C}^F$ を必ず通ることがわかっているので、軌道の基点 H は $\bar{C}^F$ からとることができる。

定理 2 ([4]) 既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー表現の軌道であって、超球面内の austere 部分多様体となるものは次の制限ルート系における指定したベクトルを通る軌道に限られる。

(1) 制限ルート

(2) 制限ルート系 A_2 型 $\{\pm(e_i-e_j)\}$ のベクトル $2e_1-e_2-e_3, e_1+e_2-2e_3$

(3) 制限ルート系 A_3 型 $\{\pm(e_i-e_j)\}$ のベクトル $e_1+e_2-e_3-e_4$

(4) 制限ルート系 D 型 $\{\pm e_i\pm e_j\}$ のベクトル e_1

(5) 制限ルート系 D_4 型 $\{\pm e_i\pm e_j\}$ のベクトル $e_1+e_2+e_3\pm e_4$

(6) 重複度一定の制限ルート系 B_2 型 $\{\pm e_i,\pm e_i\pm e_j\}$ のベクトル
$e_1+\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}$ (主軌道)

(7) 制限ルート系 G_2 型のベクトル $\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{3}}$ (主軌道)

この定理の (1) と (4) に現れる軌道の例を挙げておく。単位球面

$$S^{m-1}(1) \subset \mathbf{R}^m, \qquad S^{n-1}(1) \subset \mathbf{R}^n$$

のテンソル積

$$S^{m-1}(1) \otimes S^{n-1}(1) = \{x \otimes y \in \mathbf{R}^{mn} \mid x \in S^{m-1}(1),\ y \in S^{n-1}(1)\} \subset S^{mn-1}(1)$$

を M とおくと、M は $(m+n-2)$ 次元部分多様体になることがわかり、

$$T_{x\otimes y}(M) = T_x S^{m-1}(1) \otimes y + x \otimes T_y S^{n-1}(1).$$

これより、M の $x \otimes y$ における $S^{mn-1}(1)$ 内の法ベクトル空間は

$$T^{\perp}_{x\otimes y}(M) = T_x S^{m-1}(1) \otimes T_y S^{n-1}(1).$$

$S^{m-1}(1)$ の x における点対称を $\sigma_m = 1_x - 1_{x^\perp}$ で表し、$\sigma = \sigma_m \otimes 1$ とおく。すると、

$$\begin{aligned} &\sigma(x\otimes y) = x \otimes y, \quad \sigma(M) = M, \\ &(d\sigma)_{x\otimes y}\xi = -\xi \quad (\xi \in T^{\perp}_{x\otimes y}(M)) \end{aligned}$$

となり、M は $S^{mn-1}(1)$ 内の弱鏡映部分多様体になることが直接わかる。

以前、筑波大学の微分幾何セミナーで講演したときに、

$$S^1(1/\sqrt{2}) \times S^1(1/\sqrt{2}) \subset S^3(1), \qquad S^1(1) \otimes S^1(1) \subset S^3(1)$$

は合同になるのかという質問を守屋さんから受けた。

$$\begin{aligned} &S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, \cos t, \sin t) \;\middle|\; s, t \in \mathbf{R} \right\}, \\ &S^1(1) \otimes S^1(1) = \{(\cos s \cos t, \cos s \sin t, \sin s \cos t, \sin s \sin t) \mid s, t \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

となっているので、等長変換

$$\phi : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_4, x_2 - x_3, x_1 - x_4, x_2 + x_3)$$

によって、$S^1(1) \otimes S^1(1)$ は $S^1(1/\sqrt{2}) \times S^1(1/\sqrt{2})$ に写ることがわかる。よって、これらは合同になる。

定理 3 **([4])** 既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー表現の軌道であって、超球面内の弱鏡映部分多様体となるものは定理 2 の分類結果から (6) と (7) を除いたものに限られる。

Lie 群の多様体への作用があるとき、最大次元の軌道の余次元をこの作用の**余等質性**という。完備連結 Riemann 多様体の余等質性 1 の連結等長変換群が二つの特異軌道を持っていると仮定する。もし弱鏡映正則軌道が存在すれば、それは二つの特異軌道から等しい距離にあり、二つの特異軌道は等長的になる。この弱鏡映軌道の性質を利用すると定理 2 の分類結果の (6) と (7) は弱鏡映軌道にならないことがわかる。他の軌道が弱鏡映になることは個別に鏡映を構成することでわかる。

球面内の部分多様体の Gauss 写像を定義し、Gauss 写像の退化する軌道について得られた結果を述べる。l 次元多様体 M^l の n 次元球面 S^n へのはめ込み $f : M \to S^n$ に対して、f の Gauss 写像 γ を M から $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の $l+1$ 次元部分空間全体のなす Grassmann 多様体 $G_{l+1}(\mathbb{R}^{n+1})$ への写像として次で定義する.

$$\begin{array}{rcl} \gamma : M & \to & G_{l+1}(\mathbb{R}^{n+1}) \\ x & \mapsto & \mathbb{R}f(x) \oplus T_{f(x)}(f(M)) \end{array}$$

γ が一定になることは f が全測地的であることと同値になる。

M^l を l 次元連結コンパクト多様体とし、はめ込み $f : M \to S^n$ の Gauss 写像 γ が退化しているとする。M の次元 l だけに依存する自然数 $F(l)$ が存在して、もし γ の階数が $F(l)$ より小さいならば、$M = S^l$ で $f(M)$ は S^n 内の l 次元の great sphere になることを Ferus [1] は示した。この結果に関連して石川-木村-宮岡 [6] は次の問題を提起した。上記結論を導く $F(l)$ は best possible か？もしこれが正しければ、階数が $F(l)$ に一致し Gauss 写像が退化するはめ込み $M^l \to S^n$ を分類せよ。

これらの背景のもとに、既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー作用の軌道を超球面の部分多様体とみたときの Gauss 写像が退化しているものを調べると、必ず制限ルートの軌道になることがわかった。特に定理 3 より、Gauss 写像の退化する軌道はすべて弱鏡映軌道になることがわかる。さらにこれらの軌道を詳しく調べることで次の結果を得た。

定理 4 ([5]) 既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー表現の軌道であって、超球面内の Gauss 写像の退化する部分多様体となるものは、長い制限ルート (制限ルートの長さがすべて等しいときはどの制限ルートでもよい) の軌道と制限ルート系が G_2 型のときの短い制限ルートの軌道に限られる。さらに、これらの軌道の Gauss 写像の退化次元は制限ルートの重複度に一致する。

長い制限ルートと G_2 型の短い制限ルートは、直交するルートをたしてもひいてもルートにならないという共通の性質を持っている。この性質を使うとその軌道の Gauss 写像が一定値になる部分多様体を持つことがわかり、この部分多様体の次元が退化次元に一致することもわかる。上の定理を証明するためには他の軌道の Gauss 写像が退化しないことを確かめる必要がある。これは軌道をいくつかのクラスに分けて個別に調べた。

参考文献

[1] D. Ferus, Totally geodesic foliations, Math. Ann., **188** (1970), 313–316.

[2] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., Calibrated geometries, Acta Math., **148** (1982), 47–157.

[3] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1978.

[4] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds, preprint.

[5] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, Orbits of s-representations with degenerate Gauss mappings, in preparation.

[6] G. Ishikawa, M. Kimura and R. Miyaoka, Submanifolds with degenerate Gauss mappings in pheres, Advanced Studies in Pure Mathematics **37**, (2002), 115–149.

[7] Dominic S. P. Leung, The reflection principle for minimal submanifolds of Riemannian symmetric spaces, J. Differential Geometry, **8** (1973), 153 – 160.

[8] F. Podestà, Some remarks on austere submanifolds, Boll. Un. Mat. Ital. B(7) **11** (1997), no.2, suppl., 157–160.