Gauss写像の退化する軌道と弱鏡映軌道

田崎博之　筑波大学

井川治(福島高専)と酒井高司(大阪市立大学)

との共同研究

球面内の部分多様体

austere部分多様体

弱鏡映部分多様体

Gauss写像の退化する部分多様体

X ： Riemann多様体

$M \subset X \quad \forall x \in M \quad \forall \xi \in T_x^{\perp} M$

$\exists \sigma : X \to X$ ： 等長変換

$$\sigma(x) = x,\ (d\sigma)_x \xi = -\xi,$$
$$\sigma(M) = M$$

M ： **弱鏡映部分多様体**

鏡映部分多様体(Leung)

：　Riemann多様体の対合的等長変換(鏡映)の固定点集合の連結成分

M ： 鏡映部分多様体 σ ： Mの鏡映

$\forall x \in M \ \ \forall \xi \in T_x^{\perp} M$

$$\sigma(x) = x, \ (d\sigma)_x \xi = -\xi,$$
$$\sigma(M) = M$$

$M \subset X \quad \forall x \in M \quad \forall \xi \in T_x^{\perp} M$

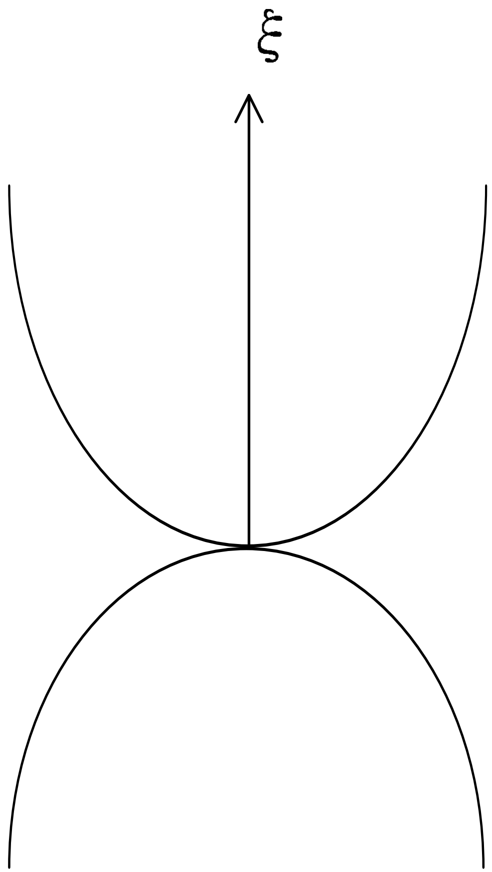
A_ξ ： シェイプ作用素

A_ξの固有値 ： -1倍不変

M ： austere部分多様体

(Harvey-Lawson)

鏡映 $\Rightarrow$ 弱鏡映 $\Rightarrow$ austere $\Rightarrow$ 極小



正の固有値の方向

負の固有値の方向

弱鏡映部分多様体の例

$$S^{n-1}(1) \times S^{n-1}(1) \subset S^{2n-1}(\sqrt{2})$$

$(1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$における鏡映

$$\sigma(x, y) = (y, x)$$

$n = 2$の場合： Clifford torus

部分多様体の構成法

(G, K) ： Riemann対称対

$\mathcal{G} = \mathcal{K} + \mathcal{M}$ ： Lie代数の標準分解

$H \in \mathcal{M}$ $(\neq 0)$

$\mathrm{Ad}_G(K)H$ ： 超球面の部分多様体

軌道の分類　(G,K)が既約の場合

$\mathrm{Ad}_G(K)H$がaustere部分多様体になるH

(1) 制限ルート

(2) A_2型$\{\pm(e_i - e_j)\}$の$2e_1 - e_2 - e_3, e_1 + e_2 - 2e_3$

(3) A_3型$\{\pm(e_i - e_j)\}$の$e_1 + e_2 - e_3 - e_4$

(4) D型$\{\pm e_i \pm e_j\}$のe_1

(5) D_4型$\{\pm e_i \pm e_j\}$の$e_1 + e_2 + e_3 \pm e_4$

(6) 重複度一定のB_2型$\{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j\}$の$e_1 + \frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}$

(7) G_2型の$\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{3}}$

(1)と(4)に現れる例

$$S^{m-1}(1) \otimes S^{n-1}(1) \subset S^{mn-1}(1)$$

$\sigma = \sigma_m \otimes 1$: **鏡映**

$\sigma_m : S^{m-1}(1)$ **の点対称**

$\mathrm{Ad}_G(K)H$ が弱鏡映部分多様体になる H

(1) 制限ルート

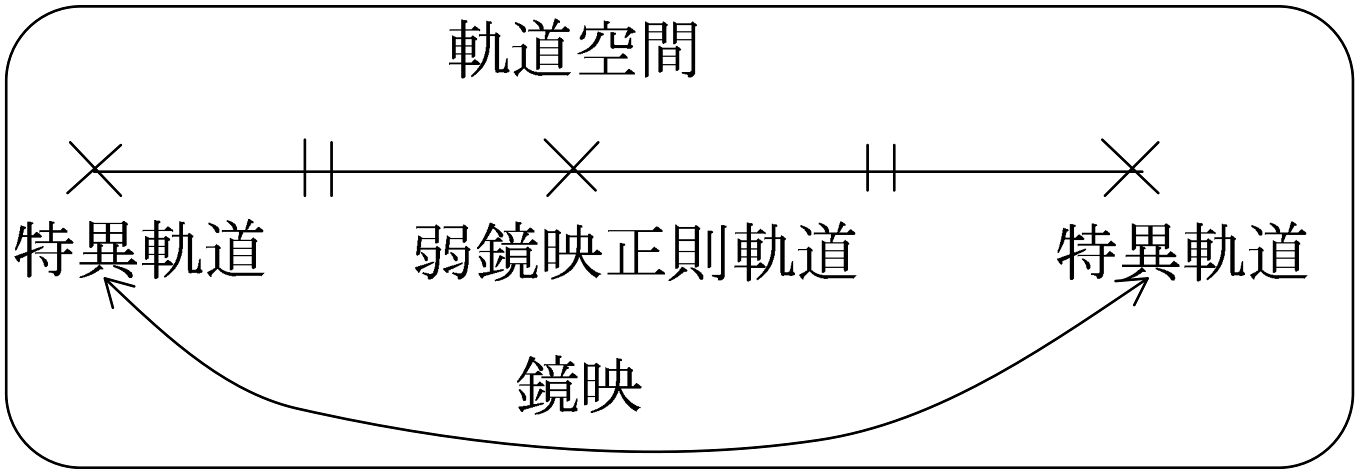
(2) A_2 型 $\{\pm(e_i - e_j)\}$ の $2e_1 - e_2 - e_3, e_1 + e_2 - 2e_3$

(3) A_3 型 $\{\pm(e_i - e_j)\}$ の $e_1 + e_2 - e_3 - e_4$

(4) D 型 $\{\pm e_i \pm e_j\}$ の e_1

(5) D_4 型 $\{\pm e_i \pm e_j\}$ の $e_1 + e_2 + e_3 \pm e_4$

(6), (7)が弱鏡映にならない理由



$f : M^l \to S^n$ はめこみ

Gauss写像$\gamma : M \to G_{l+1}(\mathbf{R}^{n+1})$

$$\gamma(x) = \mathbf{R}f(x) \oplus T_{f(x)}(f(M))$$

軌道のGauss写像退化

$\Rightarrow$ 制限ルートの軌道$\Rightarrow$ 弱鏡映

$$\left.\begin{array}{l}\text{長い制限ルートの軌道}\\ G_2\text{型の短いルートの軌道}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{Gauss写像退化}$$