Gauss 写像の退化する軌道と弱鏡映軌道

筑波大学数理物質科学研究科　田崎博之

この研究は井川治 (福島高専)、酒井高司 (大阪市大) との共同研究である。

Harvey-Lawson[2] の提起した austere 部分多様体が超球面内にどの程度存在するのか見るために、既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー作用の軌道が球面内で austere 部分多様体になるための条件を制限ルート系に関する条件で記述し、この条件を満たす軌道をすべて求めて詳しく調べてみると、austere 軌道のいくつかは法ベクトルの方向に裏返す等長変換に関して不変になることに気付いた。この性質は Leung[5] の提起した鏡映部分多様体の条件を弱くした条件になっていて、余等質性 1 の等長変換群の作用の特異軌道が austere になることを示した Podestà[6] の論法とも関係がある。そこで、この性質を持つ部分多様体を弱鏡映部分多様体と名付け、その基本的性質を調べ始めた。既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー作用の軌道のうちで、超球面内で弱鏡映になるものと austere になるものの分類結果を論文 [3] で発表した。今回はさらに Gauss 写像の退化する軌道の分類結果と弱鏡映軌道との関係について発表する。

定義 1 X を Riemann 多様体、M を X の部分多様体とする。各点 $x \in M$ における法ベクトル $\xi \in T_x^\perp M$ に対して次の条件を満たす X の等長変換 σ_ξ が存在するとき、M を**弱鏡映部分多様体**という。

$$\sigma_\xi(x) = x, \qquad (d\sigma_\xi)_x \xi = -\xi, \qquad \sigma_\xi(M) = M.$$

X を Riemann 多様体、M を X の部分多様体とし、M のシェイプ作用素を A で表わす。M の任意の点の任意の法ベクトル ξ に対して A_ξ の固有値が -1 倍に関して不変であり、-1 倍で対応する固有値の重複度が等しいとき、M を **austere 部分多様体**という。

弱鏡映部分多様体、austere 部分多様体、極小部分多様体の間には次の関係がある。

$$\text{弱鏡映} \Rightarrow \text{austere} \Rightarrow \text{極小}$$

弱鏡映部分多様体と austere 部分多様体の関係を見るために、既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー表現の軌道について調べ、これらを分類した。

定理 2 既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー表現の軌道であって、超球面内の austere 部分多様体となるものは次の制限ルート系における指定したベクトルを通る軌道に限られる。

(1) 制限ルート

(2) 制限ルート系 A_2 型 $\{\pm(e_i - e_j)\}$ のベクトル $2e_1 - e_2 - e_3, e_1 + e_2 - 2e_3$

(3) 制限ルート系 A_3 型 $\{\pm(e_i - e_j)\}$ のベクトル $e_1 + e_2 - e_3 - e_4$

(4) 制限ルート系 D 型 $\{\pm e_i \pm e_j\}$ のベクトル e_1

(5) 制限ルート系 D_4 型 $\{\pm e_i \pm e_j\}$ のベクトル $e_1 + e_2 + e_3 \pm e_4$

(6) 重複度一定の制限ルート系 B_2 型 $\{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j\}$ のベクトル
$e_1 + \frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}$ (主軌道)

(7) 制限ルート系 G_2 型のベクトル $\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{3}}$ (主軌道)

定理 3 既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー表現の軌道であって、超球面内の弱鏡映部分多様体となるものは定理 2 の分類結果から (6) と (7) を除いたものに限られる。

l 次元多様体 M^l の n 次元球面 S^n へのはめ込み $f : M \to S^n$ に対して、f の Gauss 写像 γ を M から $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の $l+1$ 次元部分空間全体のなす Grassmann 多様体 $G_{l+1}(\mathbb{R}^{n+1})$ への写像として次で定義する.

$$\begin{array}{rcl} \gamma : M & \to & G_{l+1}(\mathbb{R}^{n+1}) \\ x & \mapsto & \mathbb{R}f(x) \oplus T_{f(x)}(f(M)) \end{array}$$

γ が一定になることは f が全測地的であることと同値になる。

M^l を l 次元連結コンパクト多様体とし、はめ込み $f : M \to S^n$ の Gauss 写像 γ が退化しているとする。Ferus [1] は M の次元 l だけに依存する自然数 $F(l)$ が存在して、もし γ の階数が $F(l)$ より小さいならば、$M = S^l$ で $f(M)$ は S^n 内の l 次元の great sphere になることを示した。この結果に関連して石川-木村-宮岡 [4] は次の問題を提起した。上記結論を導く $F(l)$ は best possible か？もしこれが正しければ、階数が $F(l)$ に一致し Gauss 写像が退化するはめ込み $M^l \to S^n$ を分類せよ。

これらの背景をもとに、既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー作用の軌道を超球面の部分多様体とみたときの Gauss 写像が退化しているものを調べると、必ず制限ルートの軌道になることがわかった。特に定理 3 より、Gauss 写像の退化する軌道はすべて弱鏡映軌道になることがわかる。さらにこれらの軌道を詳しく調べることで次の結果を得た。

定理 4 既約 Riemann 対称対の線形イソトロピー表現の軌道であって、超球面内の Gauss 写像の退化する部分多様体となるものは、長い制限ルート (制限ルートの長さがすべて等しいときはどの制限ルートでもよい) の軌道と制限ルート系が G_2 型のときの短い制限ルートの軌道に限られる。さらに、これらの軌道の Gauss 写像の退化次元は制限ルートの重複度に一致する。

参考文献

[1] D. Ferus, Totally geodesic foliations, Math. Ann., **188** (1970), 313–316.

[2] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., Calibrated geometries, Acta Math., **148** (1982), 47–157.

[3] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds, preprint.

[4] G. Ishikawa, M. Kimura and R. Miyaoka, Submanifolds with degenerate Gauss mappings in pheres, Advanced Studies in Pure Mathematics **37**, (2002), 115–149.

[5] Dominic S. P. Leung, The reflection principle for minimal submanifolds of Riemannian symmetric spaces, J. Differential Geometry, **8** (1973), 153 – 160.

[6] F. Podestà, Some remarks on austere submanifolds, Boll. Un. Mat. Ital. B(7) **11** (1997), no.2, suppl., 157–160.