Gauss 写像が退化する軌道と弱鏡映軌道

(井川治・田崎博之との共同研究)

酒井高司

大阪市立大学数学研究所

2007 年 8 月 24 日
幾何学シンポジウム
於　鹿児島大学

Definition of a weakly reflective submanifold

Definition

$M \subset \widetilde{M}$: **弱鏡映部分多様体**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 各点 $x \in M$ における各法ベクトル $\xi \in T_x^{\perp} M$ に対して,

$$\sigma_\xi(x) = x, \qquad (d\sigma_\xi)_x \xi = -\xi, \qquad \sigma_\xi(M) = M$$

を満たす $\widetilde{M}$ の等長変換 σ_ξ が存在する.

σ_ξ を ξ に関する M の**鏡映**と呼ぶ.

Example

$$S^{n-1}(1) \times S^{n-1}(1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x, y \in S^{n-1}(1)\}$$

は $S^{2n-1}(\sqrt{2})$ 内の弱鏡映部分多様体になる.

Definition of a reflective submanifold

Definition (Leung)

$\widetilde{M}$ を完備 Riemann 多様体とする．$\widetilde{M}$ の対合的等長変換 σ の固定点集合の連結成分 M を**鏡映部分多様体**という．

- 鏡映部分多様体は完備全測地的部分多様体になる．
- 各点 $x \in M$ における全ての法ベクトル $\xi \in T_x^{\perp} M$ 対して

$$\sigma(x) = x, \qquad (d\sigma)_x \xi = -\xi, \qquad \sigma(M) = M$$

が成り立つ．

Definition of an austere submanifold

Definition (Harvey-Lawson)

$M \subset \widetilde{M}$: **austere 部分多様体**

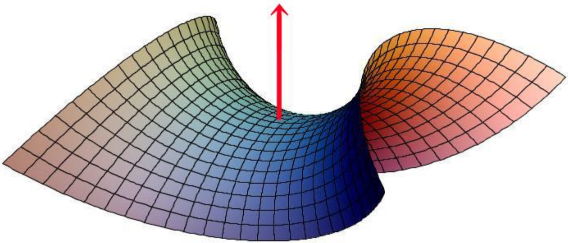
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \xi \in T_x^{\perp} M$ に対して M のシェイプ作用素 A_ξ の固有値が -1 倍に関して不変であり，-1 倍で対応する固有値の重複度が等しい.

- Austere 部分多様体は極小部分多様体になる.
- 極小曲面は austere 部分多様体である.

Classes of submanifolds

Proposition

$$\text{鏡映} \subset \text{弱鏡映} \subset \text{austere} \subset \text{極小}$$



Orbits of cohomogeneity one actions

Proposition (Podestà, IST)

Riemann 多様体の余等質性 1 の等長変換群の特異軌道は弱鏡映部分多様体になる．

Proposition

完備連結 Riemann 多様体の余等質性 1 の連結等長変換群が二つの特異軌道を持っていると仮定する．もし弱鏡映主軌道が存在すれば，それは二つの特異軌道から等しい距離にあり，二つの特異軌道は等長的になる．

Orbits of s-representations

(G, K)：コンパクト対称対

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m} \quad \text{(標準分解)}$$

$H \in S \subset \mathfrak{m}$ に対して軌道 $\mathrm{Ad}(K)H \subset S$ を考える．
$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$：極大可換部分空間

$$\mathfrak{m}_\lambda = \{X \in \mathfrak{m} \mid [H, [H, X]] = -\langle \lambda, H \rangle^2 X \ ({}^\forall H \in \mathfrak{a})\}$$

$R = \{\lambda \in \mathfrak{a} \mid \mathfrak{m}_\lambda \neq \{0\}\}$：制限ルート系

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a} + \sum_{\lambda \in R_+} \mathfrak{m}_\lambda \quad \text{(制限ルート空間分解)}$$

Orbits of s-representations

F : 基本ルート系

$$C = \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \alpha, H \rangle > 0 \ (\forall \alpha \in F)\} \quad \text{: 基本 Weyl 領域}$$

$$\mathrm{Ad}(K)\bar{C} = \mathfrak{m} \quad \text{より} \quad \bar{C} \cap S \quad \text{: 軌道空間}$$

$\Delta \subset F$ に対して

$$C^{\Delta} = \{H \in \bar{C} \mid \langle \alpha, H \rangle > 0 \ (\alpha \in \Delta), \ \langle \beta, H \rangle = 0 \ (\beta \in F - \Delta)\}$$

$$\bar{C} = \bigcup_{\Delta \subset F} C^{\Delta} \quad \text{disjoint union}$$

Theorem (広橋-Song-高木-田崎)

部分集合 $\Delta \subset F$ に対して，$H \in C^{\Delta} \cap S$ が唯一つ存在して $\mathrm{Ad}(K)H$ は S の極小部分多様体となる．

Austere orbits of s-representations

既約 s 表現の軌道であって，超球面内の austere 部分多様体となるものは次のものに限られる．

1. 制限ルートの軌道
2. A_2 型;　$H = 2e_1 - e_2 - e_3,\ e_1 + e_2 - 2e_3$
3. A_3 型;　$H = e_1 + e_2 - e_3 - e_4$
4. D_n 型;　$H = e_1$
5. D_4 型;　$H = e_1 + e_2 + e_3 \pm e_4$
6. B_2 型で重複度が一定値;　$H = e_1 + \frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}$　(主軌道)
7. G_2 型;　$H = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{3}}$ に対応するベクトルの軌道　(主軌道)

Weakly reflective orbits of s-representations

既約 s 表現の軌道であって，超球面内の弱鏡映部分多様体になるものは次のものに限られる．

1. 制限ルートの軌道
2. A_2 型; $H = 2e_1 - e_2 - e_3$, $e_1 + e_2 - 2e_3$
3. A_3 型; $H = e_1 + e_2 - e_3 - e_4$
4. D_n 型; $H = e_1$
5. D_4 型; $H = e_1 + e_2 + e_3 \pm e_4$

Gauss mapping

$f : M^l \longrightarrow S^n$ はめ込み

$$\text{Gauss 写像} \quad \gamma : M \longrightarrow G_{l+1}(\mathbb{R}^{n+1})$$
$$x \longmapsto \mathbb{R}f(x) \oplus T_{f(x)}(f(M))$$

Definition

Gauss 写像 γ が退化しているとき部分多様体 $f(M) \subset S^n$ は **tangenetially degenerate** であるという.

$$\begin{aligned} \ker(d\gamma)_x &= \{X \in T_x(M) \mid h(X, Y) = 0, \ {}^{\forall}Y \in T_x(M)\} \\ &= \bigcap_{\xi \in T_x^{\perp}(M)} \ker(A_\xi) \end{aligned}$$

Ferus inequality

Theorem (Ferus)

M^l : 連結コンパクト多様体，　$f : M \longrightarrow S^n$: はめ込み

このとき，　$\operatorname{rank}\gamma < F(l) \implies \operatorname{rank}\gamma = 0$

$$F(l) = \min\{k \mid A(k) + k \geq l\}$$: Ferus 数

$$A((2k+1)2^{c+4d}) = 2^c + 8d - 1$$: Adams 数

$$(0 \leq c \leq 3,\ 0 \leq d)$$

Problem (石川-木村-宮岡)

1. 不等式 $\operatorname{rank}\gamma < F(l)$ は best possible か？ つまり，$\operatorname{rank}\gamma = F(l)$ をみたす $f : M^l \longrightarrow S^n$ が存在するか？
2. $\operatorname{rank}\gamma = F(l)$ をみたすはめ込み $f : M^l \longrightarrow S^n$ を分類せよ．

Theorem (石川)

$M \subset \mathbb{R}P^n$: 等質コンパクト超曲面, tangentially degenerate
$\Longrightarrow M$: 超平面 or Cartan 超曲面

Theorem (宮岡)

$M \subset S^n$: 等質等径超曲面, $g = 6$
$\Longrightarrow$ 焦点部分多様体 $M_\pm$ は tangentially degenerate
さらに，これらは Ferus の不等式の等号をみたす.

Theorem (石川-木村-宮岡)

$M \subset S^n$: 等質等径超曲面, $g = 4$
$\Longrightarrow$ 焦点部分多様体 $M_\pm$ の一方のみが tangentially degenerate
さらに，これらの中に Ferus の不等式の等号を満たす例が無限個存在する.

Main result

Theorem

既約 s 表現の軌道であって，Gauss 写像の退化する超球面内の部分多様体となるものはつぎのものに限られる．

1. 長い制限ルートの軌道
2. 制限ルート系が G_2 型の場合の短い制限ルートの軌道

さらに，これらの軌道の Gauss 写像の退化次元は制限ルートの重複度に一致する．

- これらの軌道は弱鏡映部分多様体である．

軌道 Ad$(K)H$ の Gauss 写像 γ について

$$\ker(d\gamma)_H = \bigcap_{k \in (Z_K^H)_0} \mathrm{Ad}(k) \sum_{\mu \in R_+,\, \mu // H} \mathfrak{m}_\mu$$

Proposition

制限ルート λ の軌道 $\mathrm{Ad}(K)\lambda$ が tangentially degenerate

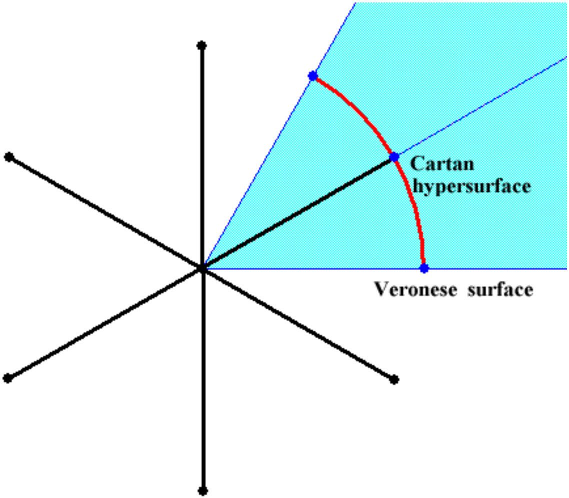
$$\iff \sum_{\mu \in R_+,\, \mu // \lambda} \mathfrak{m}_\mu \text{ が } \{0\} \text{ 以外の } \mathrm{ad}(\mathfrak{z}_K^\lambda) \text{ 不変部分空間を持つ.}$$

Proposition

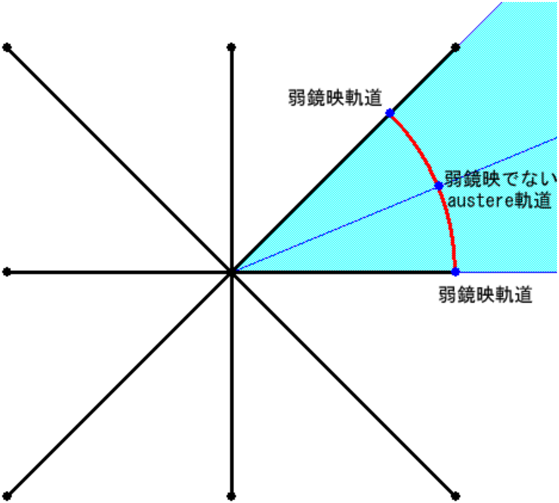
$\lambda \in R_+$ が，$2\lambda \notin R_+$ をみたし，任意の $\mu \in R_+^\Delta$ に対して
$\lambda + \mu \notin R$ かつ $\lambda - \mu \notin R$ をみたす.

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Ad}(K)\lambda \text{ は tangentially degenerate}$$

A_2 型の場合



B_2 型の場合



G_2 型の場合