

# 弱鏡映軌道と austere軌道

田崎博之

筑波大学大学院数理物質科学研究科

井川治、酒井高司との共同研究

**1 序**

**2 定義と基本的性質**

**3 弱鏡映部分多様体の例**

**4 軌道の分類**

# 1 序

$M \subset X$  : Riemann 多様体内  $X$  の部分多様体  
 $M$  の第二基本形式

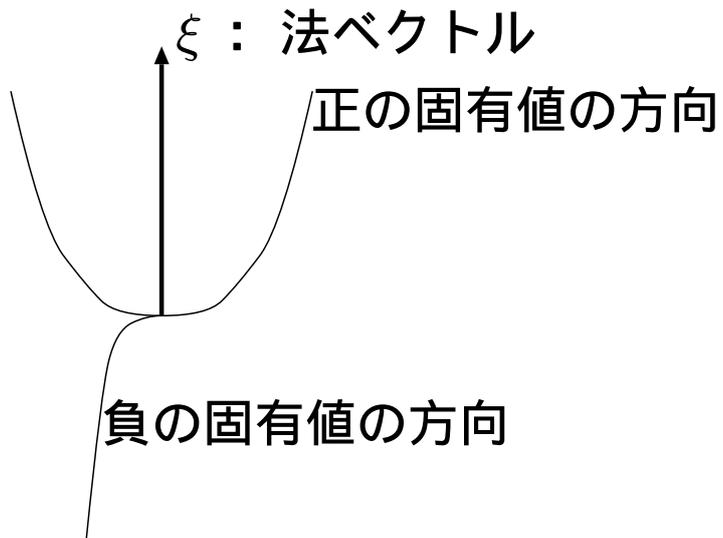
$$x \in M \quad h_x : T_x M \times T_x M \rightarrow T_x^\perp M$$

$M$  : 極小部分多様体  $\Leftrightarrow \text{tr} h_x = 0 \ (\forall x \in M)$

$M$  : austere 部分多様体

$\Leftrightarrow \langle h_x, \xi \rangle$  の固有値 :  $-1$  倍に関して対称  
( $\forall x \in M, \forall \xi \in T_x^\perp M$ )

austere 部分多様体  $\Rightarrow$  極小部分多様体



## いい性質を持つ部分多様体の構成法

$(G, K)$  : Riemann 対称対

$\text{Ad}_G(K)$  : コンパクト

$\exists \theta : G \rightarrow G$  : 対合的自己同型

$(G_\theta)_0 \subset K \subset G_\theta$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$  :  $d\theta$  の  $\pm 1$  固有空間分解

$H \in \mathfrak{m}$  ( $\neq 0$ )

$\text{Ad}_G(K)H$  :  $\mathfrak{m}$  内の超球面の部分多様体

$\text{Ad}_G(K)H$  が超球面の **austere** 部分多様体になる  
 $\Leftrightarrow H$  と  $(G, K)$  の制限ルート系に関するある条件  
上記 **austere** 軌道は分類可能 : 第 4 節の内容

**austere** の定義 : 無限小の対称性  
多くの上記 **austere** 軌道は大域的対称性を持つ  
 $\implies$  弱鏡映部分多様体の定義

## 2 定義と基本的性質

$M \subset X$  : Riemann 多様体内  $X$  の部分多様体

$M$  : 弱鏡映部分多様体

$\Leftrightarrow \forall x \in M, \forall \xi \in T_x^\perp M \exists \sigma_\xi : X \rightarrow X$  等長変換  
 $\sigma_\xi(x) = x, d\sigma_\xi(\xi) = -\xi, \sigma_\xi(M) = M$

$M$  : 鏡映部分多様体

$\Leftrightarrow M$  : 対合的等長変換の固定点集合の連結成分  
 $\sigma : X \rightarrow X$  対合的等長変換  
 $\sigma(x) = x, d\sigma(\xi) = -\xi, \sigma(M) = M$

鏡映部分多様体 : 全測地的  
鏡映  $\Rightarrow$  弱鏡映  $\Rightarrow$  austere  $\Rightarrow$  極小

$G$  : 余等質性 1 の  $X$  の等長変換群  
 $\Rightarrow G$  の特異軌道は弱鏡映部分多様体

$G$  : 余等質性 1 の  $X$  の等長変換群  
二つの特異軌道  $O_1, O_2$  弱鏡映主軌道  $W$   
 $\Rightarrow d(W, O_1) = d(W, O_2), O_1 \cong O_2$

### 3 弱鏡映部分多様体の例

$$M = S^1(1) \times S^1(1) = \{(x, y) \mid x, y \in S^1(1)\}$$

$S^3(\sqrt{2})$  の弱鏡映部分多様体

$x = (1, 0, 1, 0)$  に対して

$$T_x^\perp M = \mathbf{R}(1, 0, -1, 0)$$

$$\sigma(x_1, x_2, y_1, y_2) = (y_1, y_2, x_1, x_2)$$

$\sigma$  によって  $M$  は  $S^3(\sqrt{2})$  の弱鏡映部分多様体

$M$  : Clifford torus

$SU(n)$  の Lie 代数  $su(n)$  の元

$H = \text{diag}(\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}, 0, \dots, 0)$  の随伴軌道

$\text{Ad}(SU(n))H$  : 超球面の弱鏡映部分多様体

Weyl 群の作用を利用して鏡映を構成

他のコンパクト単純 Lie 群についても同様

他のコンパクト既約対称空間についても同様

## 4 軌道の分類

$(G, K)$  が既約の場合

$\text{Ad}_G(K)H$  が **austere** 部分多様体になる  $H$

(1) 制限ルート

(2)  $A_2$  型  $\{\pm(e_i - e_j)\}$  の  $2e_1 - e_2 - e_3, e_1 + e_2 - 2e_3$

(3)  $A_3$  型  $\{\pm(e_i - e_j)\}$  の  $e_1 + e_2 - e_3 - e_4$

(4)  $D$  型  $\{\pm e_i \pm e_j\}$  の  $e_1$

(5)  $D_4$  型  $\{\pm e_i \pm e_j\}$  の  $e_1 + e_2 + e_3 \pm e_4$

(6)  $B_2$  型  $\{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j\}$  の  $e_1 + \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}$

(7)  $G_2$  型の  $\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{3}}$

$(G, K)$  が既約の場合

$\text{Ad}_G(K)H$  が弱鏡映部分多様体になる  $H$

(1) 制限ルート

(2)  $A_2$  型  $\{\pm(e_i - e_j)\}$  の  $2e_1 - e_2 - e_3, e_1 + e_2 - 2e_3$

(3)  $A_3$  型  $\{\pm(e_i - e_j)\}$  の  $e_1 + e_2 - e_3 - e_4$

(4)  $D$  型  $\{\pm e_i \pm e_j\}$  の  $e_1$

(5)  $D_4$  型  $\{\pm e_i \pm e_j\}$  の  $e_1 + e_2 + e_3 \pm e_4$