金沢大学連続講義 (1991 年 1 月 24〜26 日)　講義ノート [改訂版]

## 1 位相ベクトル空間からの準備

**1.1 定義.** 実ベクトル空間 $X$が次の条件を満たす位相を持っているとき $X$を位相ベクトル空間という。

(1) $X$のどの *1* 点も閉集合である。
(2) $X$の実ベクトル空間としての演算

$$
\begin{aligned}
&X \times X \longrightarrow X; (x, y) \longmapsto x + y \\
&\mathbb{R} \times X \longrightarrow X; (r, x) \longmapsto rx
\end{aligned}
$$

は連続である。

**1.2 定義.** 位相ベクトル空間が凸集合だけから成る 0 の基本近傍系を持つとき局所凸位相ベクトル空間という。

**1.3 定義.** 実ベクトル空間 $X$上の距離 $d$ が

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \qquad (x, y, z \in X)$$

を満たすとき、$d$ を不変距離と呼ぶ。位相ベクトル空間 $Y$の位相が完備な不変距離から誘導されているとき、$Y$を *Fréchet* 空間と呼ぶ。

**1.4 定義.** 実ベクトル空間 $X$上の実数値関数 $p$ が

$$
\begin{aligned}
&p(x + y) \leq p(x) + p(y) \qquad (x, y \in X) \\
&p(rx) = |r|p(x) \qquad (r \in \mathbb{R}, x \in X)
\end{aligned}
$$

を満たすとき $p$ を $X$上のセミノルムと呼ぶ。さらにセミノルム $p$ が $p(x) = 0$ ならば $x = 0$ を満たすとき $p$ を $X$上のノルムと呼ぶ。

**1.5 命題.** $p$ を実ベクトル空間 $X$上のノルムとし

$$d(x, y) = p(x - y) \qquad (x, y \in X)$$

とおくと、$d$ は $X$の不変距離になり、$d$ が誘導する位相に関して $X$は局所凸位相ベクトル空間になる。

**1.6 命題.** $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$を実ベクトル空間 $X$上のセミノルムの可算族とする。さらに $x \in X$ に対して任意の $i$ について $p_i(x) = 0$ ならば $x = 0$ が成り立つと仮定する。このとき

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(x - y)}{1 + p_i(x - y)} \qquad (x, y \in X)$$

とおくと、$d$ は $X$の不変距離になり、$d$ が誘導する位相に関して $X$は局所凸位相ベクトル空間になる。

**1.7 例.** $\mathbb{R}$ 上の実数値 $C^\infty$級関数の全体がつくる実ベクトル空間を $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ で表すことにする。

$$p_i^j(f) = \sum_{k=0}^{j} \sup_{-i \le t \le i} \left| \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right| \qquad (f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}))$$

とおくと $\{p_i^j\}$ は $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ 上のセミノルムの可算族になり、命題 *1.6* の仮定を満たす。さらにこのセミノルムの可算族から構成された不変距離は完備になる。したがって命題 *1.6* より $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ はこの不変距離が誘導する位相に関して局所凸 *Fréchet* 空間になる。

**1.8 定義.** 位相ベクトル空間 $X$上の実数値連続線形写像の全体がつくる実ベクトル空間を $X^*$で表し $X$の双対空間と呼ぶ。

**1.9 命題.** $p$ を実ベクトル空間 $X$上のノルムとし、命題 *1.5* の方法で $X$を位相ベクトル空間とみる。このとき

$$p^*(\alpha) = \sup\{\alpha(x) |\ x \in X,\ p(x) = 1\} \qquad (\alpha \in X^*)$$

とおくと、$p^*$は $X^*$上のノルムになる。

**1.10 定義.** 命題 *1.9* の $p^*$を $p$ の双対ノルムと呼ぶ。

**1.11 定理 (Hahn-Banach).** 局所凸位相ベクトル空間 $X$のコンパクト凸部分集合 $A$ と閉部分ベクトル空間 $B$が $A \cap B = \emptyset$ を満たすとき、ある$\lambda \in X^*$が存在して$\lambda$は $A$ 上で正の値をとり $B$上で 0 になる。

**1.11' 定理 (Hahn-Banach).** 局所凸位相ベクトル空間 $X$の部分ベクトル空間 $Y$上で定義された線形写像 $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ が $X$の相対位相に関して連続ならば、ある連続線形写像$\bar{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在して$\bar{f}|_Y = f$を満たす。

**1.12 定義.** $X$を位相ベクトル空間とし $X^*$をその双対空間とする。すべての $x \in X$ について

$$X^* \longrightarrow \mathbb{R}; \alpha \longmapsto \alpha(x)$$

が連続になる $X^*$の位相の内で最弱の位相を $X^*$の弱位相と呼ぶ。

**1.13 命題.** $X, Y$を位相ベクトル空間とし $X^*, Y^*$をそれぞれの双対空間とする。$f : X \longrightarrow Y$が連続線形写像ならば、$f^* : Y^* \longrightarrow X^*; \alpha \longmapsto \alpha \circ f$もそれぞれの双対空間の弱位相に関して連続線形写像になる。

**1.14 命題.** $X$を位相ベクトル空間とし $X^*$をその双対空間とする。このとき $X^*$は弱位相に関して局所凸位相ベクトル空間になり、$X^*$の双対空間は $X$に一致する。

**1.15 定理 (Banach-Alaoglu).** $X$を位相ベクトル空間とし $X^*$をその双対空間とする。$X$の 0 の近傍 $V$に対して

$$K = \{\alpha \in X^* |\ |\alpha(x)| \le 1\ for\ {}^\forall x \in V\}$$

とおくと $K$は $X^*$の弱位相に関してコンパクトになる。

## 参考文献

W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.