金沢大学連続講義 (1991 年 1 月 24〜26 日)　講義ノート [改訂版]

2 測度論からの準備

2.1 定義. 集合 Xの部分集合全体のつくる集合を 2^Xで表す。関数$\phi : 2^X \longrightarrow [0,\infty]$が次の条件を満たすとき、$\phi$を X上の測度と呼ぶ。Fは高々可算な 2^Xの部分集合で $A \subset \cup F$ならば、

$$\phi(A) \leq \sum_{B\in F} \phi(B).$$

2.2 定義. ϕを集合 X上の測度とし、$A \in 2^X$とする。任意の $T \in 2^X$に対して

$$\phi(T) = \phi(T \cap A) + \phi(T \sim A).$$

が成り立つとき、A をϕ可測集合と呼ぶ。

2.3 定義. ϕを集合 X上の測度とし、$A \subset X$で Pを A の各元に対する命題とする。$\phi(A \sim \{x \in A | P(x)\}) = 0$ が成り立つとき、$P(x)$ がϕに関してほとんどすべての $x \in A$ に対して成り立つという。

2.4 定義. ϕを集合 X上の測度とし、Yを位相空間とする。fが Xのϕに関してほとんどすべての点で定義された Yへの写像であり、Yの任意の開集合 Eに対して $f^{-1}(E)$ が Xのϕ可測集合になるとき、fを Xから Yへのϕ可測写像と呼ぶ。

2.5 定義. ϕを集合 X上の測度とし、fを Xのϕに関してほとんどすべての点で定義されていて$\bar{\mathbb{R}}$に値を持つ関数とすると、fのϕ上積分$\int^* fd\phi$, ϕ下積分$\int_* fd\phi$を定義することができる。ϕ可測関数 fに対して、

$$\int^* fd\phi = \int_* fd\phi$$

のとき、fをϕ積分確定と呼び、この値を$\int fd\phi$で表す。さらに、$\int fd\phi \in \mathbb{R}$ のとき、fをϕ積分可能またはϕ可積分と呼ぶ。

2.6 定理 (Riesz の表現定理). Xを局所コンパクト *Hausdorff* 空間とし、

$$\mathcal{K}(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} | f : \text{連続}, \operatorname{spt} f : \text{コンパクト}\}$$

とおく。

$$\mu : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

は線形写像で、$f \in \mathcal{K}(X)^+ = \{f \in \mathcal{K}(X) | f(x) \geq 0 (x \in X)\}$ に対して $0 \leq \mu(f)$ とする。このとき X上の測度ψが存在し、X上の実数値連続関数はすべてψ可測になり

$$\mu(f) = \int fd\psi \qquad (f \in \mathcal{K}(X))$$

が成り立つ。

2.7 定理. Xを局所コンパクト *Hausdorff* 空間とし、Eをノルム p を持つ有限次元実ベクトル空間とする。$\mathcal{K}(X,E)$ で Xから Eへのコンパクトな台を持つ連続写像全体のつくる実ベクトル空間を表す。

$$|e| = \sup_{x \in X} p(e(x)) \qquad (e \in \mathcal{K}(X,E))$$

とおくと $|\ |$ は $\mathcal{K}(X,E)$ のノルムになる。よって命題 *1.5* の方法で $\mathcal{K}(X,E)$ は位相ベクトル空間になる。このとき連続線形写像

$$T : \mathcal{K}(X,E) \longrightarrow \mathbb{R}$$

に対して

$$\lambda(f) = \sup\{T(e) | e \in \mathcal{K}(X,E),\ p(e(x)) \leq f(x)(x \in X)\} \quad (f \in \mathcal{K}(X)^+)$$

とおいてλを線形に $\mathcal{K}(X)$ 上に拡張すると、λは定理 *2.6* の仮定を満たす。λに対応する測度をμとすると Xから E^*へのμ可測写像$\vec{T}$が存在し

$$\int_X p^*(\vec{T}) d\mu < \infty, \qquad p^*(\vec{T}) = 1 \quad \mathit{for}\ \mu a.a.x \in X$$
$$T(e) = \int_X \langle e, \vec{T} \rangle d\mu \qquad \mathit{for}\ {}^\forall e \in \mathcal{K}(X,E).$$

参考文献

H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer, Berlin, 1969.