3 Mass と comass

3.1 基本事項. Vを n 次元実ベクトル空間とし、$\cdot$ を V上の内積とする。まず、$\wedge^p V$と$\wedge^p V^*$に内積を定める。*polarity* βを

$$\beta : V \longrightarrow V^*, \quad x \cdot y = \langle x, \beta(y) \rangle \quad \textit{for } x, y \in V$$

によって定める。βが等長的になるように V^*に内積を入れる。さらに、$\beta : V \longrightarrow V^*$を代数準同型写像$\gamma : \wedge^* V \longrightarrow \wedge^* V^*$ に拡張する。γは次数を保つので、$\gamma_p : \wedge^p V \longrightarrow \wedge^p V^*$ を誘導する。

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \wedge^p V & \xrightarrow{\gamma_p} & \wedge^p V^* \\ = \big\downarrow & & \big\downarrow \cong \\ \wedge^p V & \xrightarrow{\beta_p} & (\wedge^p V)^* \end{array}$$

が可換になるようにβ_pを定める。β_pが *polarity* になるように$\wedge^p V$に内積を決める。すなわち、

$$\xi \cdot \eta = \langle \xi, \beta_p(\eta) \rangle \quad \textit{for } \xi, \eta \in \wedge^p V.$$

これは$\wedge^p V$の内積になることがわかる。$v_i, w_j \in V$に対して、

$$(v_{1\wedge} \ldots {}_\wedge\, v_p) \cdot (w_{1\wedge} \ldots {}_\wedge\, w_p) = \det(v_i \cdot w_j)$$

が成り立つ。$\{e_1, \ldots, e_n\}$ を Vの正規直交基底とする。

$$\Lambda(n, p) = \{\lambda : \{1, \ldots, p\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\} \text{ は単調増加 }\}$$

とおくと、

$$\{e_\lambda = e_{\lambda(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda(p)} | \lambda \in \Lambda(n, p)\}$$

は$\wedge^p V$の正規直交基底になる。可換図式 $(*)$ のすべての写像が等長的になるようにそれぞれの空間に内積をいれておく。これらの内積に関するノルムはすべて $|\ |$ で表す。

$$G(p, V) = \{v_1 \wedge \cdots \wedge v_p | v_1, \ldots, v_p \text{ は } V \text{ の正規直交系 }\}$$

とおくと、$G(p, V)$ はV内の向きのついたp次元部分ベクトル空間全体がつくる *Grassmann* 多様体と微分同型になり、特にコンパクトになる。

3.2 定義. $\phi \in \wedge^p V^*$に対して

$$\|\phi\|^* = \sup\{\phi(\xi) \mid \xi \in G(p, V)\}$$

によって *comass* $\|\ \|^*$を定義する。

3.3 命題. *Comass* $\|\ \|^*$は$\wedge^p V^*$のノルムになる。

証明. $\phi, \psi \in \wedge^p V^*$に対して

$$\begin{aligned}\|\phi+\psi\|^* =& \sup\{\phi(\xi)+\psi(\xi) \mid \xi \in G(p,V)\}\\ \leq& \sup\{\phi(\xi) \mid \xi \in G(p,V)\} + \sup\{\psi(\xi) \mid \xi \in G(p,V)\}\\ \leq& \|\phi\|^* + \|\psi\|^*.\end{aligned}$$

次に $G(p,V)$ はコンパクトだから、ある$\xi_0 \in G(p,V)$ が存在して$\phi(\xi_0) = \|\phi\|^*$が成り立つ。そこで $r \in \mathbb{R}$ をとると

$$\|r\phi\|^* = \sup\{r\phi(\xi) | \, \xi \in G(p,V)\} \leq |r|\|\phi\|^*.$$

$r \geq 0$ のとき $r\phi(\xi_0) = |r|\|\phi\|^*$となるので $\|r\phi\|^* = |r|\|\phi\|^*$。また $r < 0$ のときは $-\xi_0 \in G(p,V)$ で $r\phi(-\xi_0) = |r|\|\phi\|^*$となるので $\|r\phi\|^* = |r|\|\phi\|^*$。

$\|\phi\|^* = 0$ とすると、任意の$\xi \in G(p,V)$ に対して$\phi(\xi) = 0$ となるので、任意の $v_1, \ldots, v_p \in V$に対して$\phi(v_1, \ldots, v_p) = 0$ が成り立つ。つまり$\phi = 0$ となる。以上で $\|\ \|^*$が$\wedge^p V^*$のノルムになることがわかった。

3.4 定義. $\wedge^p V$の *mass* を *comass* の双対ノルムとして定義する。つまり$\xi \in \wedge^p V$に対して、ξの *mass* $\|\xi\|$ を

$$\|\xi\| = \sup\{\phi(\xi) \mid \phi \in \wedge^p V^*,\ \|\phi\|^* = 1\}$$

で定める。

3.5 命題. *Mass* $\|\ \|$ は$\wedge^p V$のノルムになる。

3.6 命題. $\phi \in \wedge^p V^*$に対して

$$\|\phi\|^* = \sup\{\phi(\xi) \mid \xi \in \wedge^p V,\ ||\xi|| = 1\}$$

が成り立つ。

3.7 定理 (Wirtinger 不等式). $V = \mathbb{C}^n$の場合について考える。内積 $\cdot$ は標準的とする。

$$\begin{aligned}Jv &= iv \quad \textit{for } v \in \mathbb{C}^n,\\ \omega(u,v) &= (Ju)\cdot v\end{aligned}$$

とすると、ωは $U(n)$ 不変 *2* 次形式になる。$\|\omega\|^* = 1$ となり$\xi \in G(2, \mathbb{C}^n)$ に対して

$$\langle \xi, \omega\rangle = 1 \Longleftrightarrow \xi : \textit{canonically oriented } J\textit{-invariant 2-plane.}$$

さらに $1 \leq k \leq n$ とすると $\|\omega^k\|^* = k!$となり$\xi \in G(2k, \mathbb{C}^n)$ に対して、

$$\langle \xi, \omega^k\rangle = k! \Longleftrightarrow \xi : \textit{canonically oriented } J\textit{-invariant } 2k\textit{-plane.}$$

証明. $u, v \in \mathbb{C}^n$に対して

$$\langle u \wedge v, \omega\rangle = (Ju)\cdot v \leq |Ju| \cdot |v| = |u| \cdot |v|$$

となるので $\|\omega\|^* \le 1$。さらに$\xi \in G(2, \mathbb{C}^n)$ に対して $\langle \xi, \omega \rangle = 1$ が成り立つための必要十分条件はξが canonically oriented J-invariant 2-plane になることである。

$\iota : \xi \hookrightarrow \mathbb{C}^n$とすると$\iota^*\omega \in \wedge^2 \xi$。

$$\begin{aligned}
&{}^\exists\{v_1, \dots, v_{2k}\} : \text{orthonormal basis of } \xi \\
&{}^\exists a_1, \dots, a_k : \text{nonnegative numbers} \\
&\text{s.t.} \quad \iota^*\omega = a_1 v_1^* \wedge v_2^* + \cdots + a_k v_{2k-1}^* \wedge v_{2k}^*
\end{aligned}$$

ここで、$a_i = \omega(v_{2i-1}, v_{2i})$ となっている。したがって $0 \le a_i \le 1$。

$$\iota^*\omega^k = (\iota^*\omega)^k = k! a_1 \dots a_k v_1^* \wedge \cdots \wedge v_{2k}^*.$$

さらに、$\xi = \varepsilon v_1 \wedge \cdots \wedge v_{2k}, \varepsilon = \pm 1$ だから、

$$\langle \xi, \omega^k \rangle = \langle \xi, \iota^*\omega^k \rangle = \varepsilon k! a_1 \dots a_k \le k!$$

となり、

$$\begin{aligned}
\langle \xi, \omega^k \rangle = k! &\Longleftrightarrow \varepsilon = 1 \text{ and } a_i = 1 \text{ for } 1 \le i \le k. \\
&\Longleftrightarrow \xi : \text{canonically oriented}, J\text{-invariant}.
\end{aligned}$$

参考文献

H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer, Berlin, 1969.