4 Currents

4.1 基本事項. Xを可算開基を持つ連結 n 次元多様体とする。$0 \leq p \leq n$ に対して X 上の C^∞級 p 次微分形式の全体がつくるベクトル空間を $\mathcal{E}^p(X)$ で表わす。Xの座標近傍 O_i, U_iを

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \quad O_i \supset \overline{U}_i : \text{コンパクト}$$

となるようにとる。$\omega \in \mathcal{E}^p(X)$ に対して

$$\omega = \sum_{j_1 < \cdots < j_p} \omega_{j_1 \cdots j_p} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p} \quad \textit{on } O_i$$

$$|\omega|_i^a = \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_n \leq a \\ j_1 < \cdots < j_p}} \sup_{x \in \overline{U}_i} \left| \frac{\partial^{a_1+\cdots+a_n} \omega_{j_1 \cdots j_p}(x)}{(\partial x_1)^{a_1} \cdots (\partial x_n)^{a_n}} \right|$$

とおくと $|\ \ |_i^a$は $\mathcal{E}^p(X)$ のセミノルムになり、$|\ \ |_i^a$を使うと命題 *1.6* の方法によって $\mathcal{E}^p(X)$ は局所凸 *Fréchet* 空間になる。

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} \sum_{j_1 < \cdots < j_p} \frac{\partial \omega_{j_1 \cdots j_p}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p} \quad \textit{on } O_i$$

より $|d\omega|_i^a \leq |\omega|_i^{a+1}$となるので

$$d : \mathcal{E}^p(X) \longrightarrow \mathcal{E}^{p+1}(X)$$

は連続。

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^0(X) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{E}^n(X) \longrightarrow 0$$

を *de Rham complex* と呼ぶ。

4.2 定義. $\mathcal{E}^p(X)$ 上の連続線形形式を X上の p 次元 *current* と呼び、その全体がつくるベクトル空間、つまり $\mathcal{E}^p(X)$ の双対空間を $\mathcal{E}'_p(X)$ で表わす。

4.3 注意. $T \in \mathcal{E}'_p(X)$ について Tの台$\operatorname{spt} T$は

$$\operatorname{spt} T = X \sim \cup \{V : X\text{の開集合} \mid \phi \in \mathcal{E}^p(X), \operatorname{spt} \phi \subset V \Rightarrow T(\phi) = 0\}$$

で定義される。$\mathcal{E}'_p(X)$ の元はコンパクトな台を持つことがわかる。一般には $\mathcal{E}'_p(X)$ の元をコンパクトな台を持つ *current* と呼ぶが、ここでは単に *current* と呼ぶことにする。

4.4 定義. $T \in \mathcal{E}'_p(X)$ に対して$\partial T = T \circ d$ とすると$\partial T \in \mathcal{E}'_{p-1}(X)$ となり、線形写像 $\partial : \mathcal{E}'_p(X) \longrightarrow \mathcal{E}'_{p-1}(X)$ が定まる。∂を境界作用素と呼ぶ。

4.5 注意. $d^2=0$ より $\partial^2=0$ となり

$$0 \longleftarrow \mathcal{E}'_0(X) \xleftarrow{\partial} \cdots \xleftarrow{\partial} \mathcal{E}'_n(X) \longleftarrow 0$$

も *complex* になる。*de Rham* の定理より

$$H_*(\mathcal{E}'_*(X)) \cong H_*(X;\mathbb{R}).$$

4.6 基本事項. X 上の連続 p 次微分形式の全体がつくるベクトル空間を $\mathcal{C}^p(X)$ で表わす。$\omega \in \mathcal{C}^p(X)$ に対して

$$\omega = \sum_{j_1<\cdots<j_p} \omega_{j_1\cdots j_p} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p} \quad on\ O_i$$
$$|\omega|_i = \sum_{j_1<\cdots<j_p} \sup_{x\in \overline{U}_i} \left|\omega_{j_1\cdots j_p}(x)\right|$$

とおくと $|\ \ |_i$ は $\mathcal{C}^p(X)$ のセミノルムになり、$|\ \ |_i$ を使うと命題 *1.6* の方法によって $\mathcal{C}^p(X)$ は局所凸 *Fréchet* 空間になる。$\omega \in \mathcal{E}^p(X)$ に対して $|\omega|_i = |\omega|_i^0 \le |\omega|_i^a$ が成り立つので包含写像 $\iota : \mathcal{E}^p(X) \longrightarrow \mathcal{C}^p(X)$ は連続。

4.7 定義. $\mathcal{C}^p(X)$ 上の連続線形形式を X 上の積分表示可能な p 次元 *current* と呼び、その全体がつくるベクトル空間を $\mathfrak{m}_p(X)$ で表わす。包含写像 $\iota : \mathcal{E}^p(X) \longrightarrow \mathcal{C}^p(X)$ は連続だから $T \in \mathfrak{m}_p(X)$ に対して $T\circ\iota \in \mathcal{E}'_p(X)$。また $\mathcal{E}^p(X)$ は $\mathcal{C}^p(X)$ 内で稠密なので線形写像

$$\mathfrak{m}_p(X) \longrightarrow \mathcal{E}'_p(X); T \longmapsto T\circ\iota$$

は単射になる。したがって $\mathfrak{m}_p(X) \subset \mathcal{E}'_p(X)$ とみなすことができる。

4.8 定義. X に *Riemann* 計量を *1* つ入れ固定しておく。各 $x\in X$ において $\wedge^p T_x^* X$ での *comass* を $\|\ \|^*$ で表す。$T \in \mathcal{E}'_p(X)$ に対して

$$\mathbb{M}(T) = \sup\{T(\phi) | \phi \in \mathcal{E}^p(X), \|\phi_x\|^* \le 1 (x\in X)\}$$

とおく。$\mathbb{M}(T)$ を T の *mass* と呼ぶ。各 $T \in \mathcal{E}'_p(X)$ に対して $\mathbb{M}(T) \in [0,\infty]$。

4.9 補題. *1* の分割 $\{h_i\}$ を $\operatorname{spt} h_i \subset U_i$ となるようにとる。$T \in \mathcal{E}'_p(X)$ に対してある k が存在し

$$T(\phi) = \sum_{i=1}^{k} T(h_i\phi) \quad for\ {}^\forall\phi \in \mathcal{E}^p(X).$$

証明. $T \in \mathcal{E}'_p(X)$ の台 $\operatorname{spt} T$ はコンパクトであることに注意しておく。

$$A_k = \left\{ x\in X \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k} h_i(x) = 1 \right\}^\circ$$

とおくと、$\{A_k\}$ は X の開被覆になる。したがってある k が存在し $\operatorname{spt} T \subset A_k$ が成り立つ。任意の $\phi \in \mathcal{E}^p(X)$ に対して $\psi = \sum_{i=1}^k h_i\phi - \phi$ は A_k 上で 0 になるので $X \sim \operatorname{spt} T \supset X \sim A_k \supset \operatorname{spt}\psi$。よって $T(\psi)=0$。これより $T(\phi) = \sum_{i=1}^k T(h_i\phi)$ が成り立つ。

4.10 命題. $T \in \mathfrak{m}_p(X)$ とすると $f \in \mathcal{C}^0(X)^+$に対して

$$\sup\{T(\phi) | \phi \in \mathcal{E}^p(X), \|\phi\|^* \leq f\} < \infty.$$

証明. Tに対して補題4.9のように1の分割 $\{h_i\}$ と kをとっておく。$\phi \in \mathcal{E}^p(X), \|\phi\|^* \leq f$とする。

$$\begin{aligned} |T(\phi)| &\leq \sum_{i=1}^{k} |T(h_i\phi)| \leq \sum_{i=1}^{k} A_i |h_i\phi|_i \quad (T \in \mathfrak{m}_p(X) \text{ だから}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} B_i \sup_{\overline{U}_i} \|h_i\phi\|^* \leq \sum_{i=1}^{k} B_i \sup_{\overline{U}_i} \|\phi\|^* \leq \sum_{i=1}^{k} B_i \sup_{\overline{U}_i} f < \infty. \end{aligned}$$

4.11 命題.

$$\mathfrak{m}_p(X) = \{T \in \mathcal{E}'_p(X) | \mathbb{M}(T) < \infty\}$$

証明. $T \in \mathfrak{m}_p(X)$ に対して命題4.10を $f = 1$ として適用すると $\mathbb{M}(T) < \infty$ がわかる。逆に $T \in \mathcal{E}'_p(X)$ が $\mathbb{M}(T) < \infty$ を満たすとする。Tに対して補題4.9のように1の分割 $\{h_i\}$ と kをとっておく。$\phi \in \mathcal{E}^p(X), \|\phi\|^* \leq 1$ に対して $\|h_i\phi\|^* \leq 1$ だから、

$$|T(h_i\phi)| \leq \mathbb{M}(T)$$

よって任意の$\phi \in \mathcal{E}^p(X)$ に対しては

$$|T(h_i\phi)| \leq \mathbb{M}(T) \sup_{\overline{U}_i} \|h_i\phi\|^* \leq \mathbb{M}(T) C_i |h_i\phi|_i$$

となり

$$|T(\phi)| = \left| \sum_{i=1}^{k} T(h_i\phi) \right| \leq \sum_{i=1}^{k} |T(h_i\phi)| \leq \sum_{i=1}^{k} \mathbb{M}(T) C_i |h_i\phi|_i.$$

この評価より $T : \mathcal{E}^p(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ は $\mathcal{C}^p(X)$ $(\supset \mathcal{E}^p(X))$ の相対位相に関しても連続。したがって定理1.11'(Hahn-Banach) より Tの連続な拡張$\bar{T} : \mathcal{C}^p(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在する。$\mathfrak{m}_p(X) \subset \mathcal{E}'_p(X)$ とみなしているので$\bar{T} = T$となり $T \in \mathfrak{m}_p(X)$ である。

4.12 定理. $T \in \mathfrak{m}_p(X)$ に対して X上の測度 $\|T\|$ が存在し X上の実数値連続関数はすべて $\|T\|$ 可測になり

$$\int_X f d\|T\| = \sup\{T(\phi) | \phi \in \mathcal{E}^p(X), \|\phi\|^* \leq f\} \quad for\ {}^\forall f \in \mathcal{C}^0(X)^+$$

が成り立つ。特に$\int_X d\|T\| = \mathbb{M}(T)$。

証明. $f \in \mathcal{C}^0(X)^+$に対して、

$$\lambda(f) = \sup\{T(\phi) | \phi \in \mathcal{E}^p(X), \|\phi\|^* \leq f\}$$

とする。命題 4.10 より$\lambda(f) < \infty$が成り立つ。任意の $f \in \mathcal{C}^0(X)$ に対しては $f^+ = \max\{f, 0\}, f^- = -\min\{f, 0\}$ とおくと $f = f^+ - f^-$となり

$$\lambda(f) = \lambda(f^+) - \lambda(f^-)$$

として

$$\lambda : \mathcal{C}^0(X) \longrightarrow \mathbb{R}; \text{線形写像}$$

に拡張できる。$f \in \mathcal{K}(X)^+$に対して $0 \leq \lambda(f)$ だから、定理 2.6(Riesz の表現定理) より X上の測度 $\|T\|$ が存在し X上の実数値連続関数はすべて $\|T\|$ 可測になり

$$\int_X f d\|T\| = \lambda(f) \quad \text{for } {}^\forall f \in \mathcal{K}(X).$$

Tの台はコンパクトだから

$$\int_X f d\|T\| = \lambda(f) \quad \text{for } {}^\forall f \in \mathcal{C}^0(X).$$

特に

$$\int_X d\|T\| = \lambda(1) = \mathbb{M}(T).$$

4.13 定義. $\|T\|$ を Tの全変分測度と呼ぶ。

4.14 定理. $T \in \mathfrak{m}_p(X)$ に対してベクトル束$\wedge^p TX$の $\|T\|$ 可測な断面$\vec{T}$が一意的に存在し

$$\int_X \|\vec{T}_x\| d\|T\| x < \infty, \quad \|\vec{T}_x\| = 1 \ \ for \ \|T\| \ \ a.a. \ \ x \in X$$
$$T(\phi) = \int_X \phi(\vec{T}_x) d\|T\| x \quad for \ {}^\forall \phi \in \mathcal{C}^p(X)$$

を満たす。ここで $\|\vec{T}_x\|$ の $\| \ \ \|$ は$\wedge^p T_x X$上の $mass$ である。

証明. Tに対して補題 4.9 のように 1 の分割 $\{h_i\}$ と kをとっておく。まず O_iを 1 つ固定して考える。$e_1, \ldots, e_n$を O_i上の正規直交ベクトル場とする。

$$\begin{array}{ccc} \wedge^p T^* X|_{O_i} & \longleftrightarrow & O_i \times \wedge^p(\mathbb{R}^n)^* \\ \sum_{j_1 < \cdots < j_p} a_{j_1 \ldots j_p} e^*_{j_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{j_p} & \longleftrightarrow & (x, a_{j_1 \ldots j_p}) \end{array}$$

によって$\wedge^p T^* X|_{O_i}$を $O_i \times \wedge^p(\mathbb{R}^n)^*$と同一視して考える。すると$\phi \in \mathcal{K}(U_i, \wedge^p(\mathbb{R}^n)^*)$に対して$\phi \in \mathcal{C}^p(X)$ とみなすことができ

$$T_i(\phi) = T(\phi) \qquad (\phi \in \mathcal{K}(U_i, \wedge^p(\mathbb{R}^n)^*))$$

として $T_i : \mathcal{K}(U_i, \wedge^p(\mathbb{R}^n)^*) \longrightarrow \mathbb{R}$ を定める。$T \in \mathfrak{m}_p(X)$ だから$\wedge^p(\mathbb{R}^n)^*$の comass から定まる $\mathcal{K}(U_i, \wedge^p(\mathbb{R}^n)^*)$ のノルムに関して T_iは連続である。したがって定理 2.7 より U_i上の測度μ_iと U_iから$\wedge^p \mathbb{R}^n$へのμ_i可測写像$\vec{T}_i$が存在し

$$\int_{U_i} \|\vec{T}_i\| d\mu_i < \infty, \qquad \|(\vec{T}_i)_x\| = 1 \ \text{ for } \mu_i \text{ a.a. } x \in U_i$$
$$T_i(\phi) = T(\phi) = \int_{U_i} \phi(\vec{T}_i) d\mu_i \quad \text{for } {}^\forall \phi \in \mathcal{K}(U_i, \wedge^p(\mathbb{R}^n)^*).$$

$k < i$ のとき$\vec{T}_i = 0$ となることに注意しておく。また $||T||$ とμ_iの定めより

$$||T|| = \sum_{i=1}^{k} h_i \mu_i$$

となっている。$\vec{T}_i$を$\wedge^p TX|_{U_i} \cong U_i \times \wedge^p \mathbb{R}^n$の $\|T\|$ 可測な断面とみなすと、$U_i \cap U_j \neq \emptyset$ となる i, jについて $(\vec{T}_i)_x = (\vec{T}_j)_x$が $||T||$ に関してほとんどすべての $x \in U_i \cap U_j$に対して成り立つ。そこで

$$\vec{T}_x = (\vec{T}_i)_x \quad (x \in U_i)$$

として$\wedge^p TX$の $\|T\|$ 可測な断面$\vec{T}$を定めることができる。定め方より $||T||$ に関してほとんどすべての $x \in X$について $||\vec{T}_x|| = 1$ となる。また

$$\int_X \|\vec{T}\| d\|T\| = \sum_{i=1}^{k} \int_{U_i} \|\vec{T}_i\| h_i d\mu_i < \infty.$$

さらに補題 4.9 を使うと$\phi \in \mathcal{C}^p(X)$ に対して

$$\begin{aligned}
T(\phi) &= \sum_{i=1}^{k} T(h_i \phi) = \sum_{i=1}^{k} T_i(h_i \phi) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \int_{U_i} h_i \phi(\vec{T}_i) d\mu_i = \sum_{i=1}^{k} \int_{U_i} \phi(\vec{T}) h_i d\mu_i \\
&= \int_X \phi(\vec{T}) d\|T\|.
\end{aligned}$$

4.15 注意. 以下では $T \in \mathfrak{m}_p(X)$ に対して

$$T(\phi) = \int_X \phi(\vec{T}_x) d\|T\| x \quad for\ {}^\forall \phi \in \mathcal{C}^p(X)$$

を単に $T = \vec{T}\|T\|$ と書くこともある。