5 主定理

5.1 定義. *Xを可算開基を持つ連結 Riemann 多様体とする。$\mathcal{F}$を X上の向きのついた p 次元 foliation とする。各 $x \in X$に対して$\vec{\mathcal{F}}_x$を $\mathcal{F}$に接する $G(p, T_xX)$ の元とすると$\vec{\mathcal{F}}$は$\wedge^p TX$の断面になる。$T \in \mathfrak{m}_p(X)$ に対して*

$$\vec{T}_x = \vec{\mathcal{F}}_x \quad \textit{for } \|T\| \textit{ a.a. } x \in X$$

が成り立つとき Tを $\mathcal{F}$の foliation current と呼ぶ。さらに$\partial T = 0$ のとき Tを closed foliation current と呼ぶ。

5.2 定義. *$T \in \mathfrak{m}_p(X)$ に対して*

$$T' \in \mathcal{E}'_p(X) : \textit{homologous to } T \Longrightarrow \mathbb{M}(T) \leq \mathbb{M}(T')$$

が成り立つとき Tを homologically mass minimizing という。$\mathcal{F}$の任意の foliation current が homologically mass minimizing になるとき $\mathcal{F}$を geometrically tight という。$\mathcal{F}$の zero homologous closed foliation current が 0 しかないとき $\mathcal{F}$を homologically tight という。

5.3 定義. *$\mathcal{F}$の calibration とは X上のすべての点で comass が 1 の C^∞級 p 次閉微分形式ϕで X上で$\phi(\vec{\mathcal{F}}) = 1$ を満たすものである。*

5.4 定理. *さらに Xはコンパクトであると仮定する。このとき $\mathcal{F}$が homologically tight であるための必要十分条件は X上にある Riemann 計量が存在しその計量に関して $\mathcal{F}$が geometrically tight になることである。*

証明. X上にある Riemann 計量が存在しその計量に関して $\mathcal{F}$が geometrically tight ならば、$\mathcal{F}$の closed foliation current は homologically mass minimizing になるので特に zero homologous にはならない。したがって $\mathcal{F}$は homologically tight になる。

6 節で証明する命題 6.1 と 7 節で証明する命題 7.1 を使って逆を証明しよう。Xがコンパクトだから命題 6.1 より X上のある C^∞級 p 次閉微分形式ϕが存在し X上で$\phi(\vec{\mathcal{F}}) > 0$ を満たす。命題 7.1 より X上のある Riemann 計量が存在しその計量に関してϕは $\mathcal{F}$の calibration になる。$T \in \mathfrak{m}_p(X)$ を $\mathcal{F}$の foliation current とする。$T' \in \mathcal{E}'_p(X)$ が Tに homologous であると仮定して $\mathbb{M}(T) \leq \mathbb{M}(T')$ となることを示そう。$\mathbb{M}(T) < \infty$ だから $\mathbb{M}(T') < \infty$ の場合について考えれば十分。したがって $T' \in \mathfrak{m}_p(X)$ である。まず

$$\mathbb{M}(T) = \int_X d\|T\| = \int_X \phi(\vec{\mathcal{F}}) d\|T\| = T(\phi)$$

が成り立つ。ϕの comass は 1 だから命題 3.6 より T'に対しては

$$\mathbb{M}(T') = \int_X d\|T'\| \geq \int_X \phi(\vec{T'}) d\|T'\| = T'(\phi).$$

さらに T'が Tに homologous だからある $S \in \mathcal{E}'_{p+1}(X)$ が存在し $T' - T = \partial S$となる。したがって $T'(\phi) - T(\phi) = \partial S(\phi) = S(d\phi) = 0$ となり $T'(\phi) = T(\phi)$。以上で $\mathbb{M}(T) \leq \mathbb{M}(T')$ がわかり、Tは homologically mass minimizing である。これより $\mathcal{F}$は geometrically tight になる。