6 主定理の証明の解析的部分

6.1 命題. $\mathcal{F}$が *homologically tight* ならば、任意のコンパクト集合 $K \subset X$に対して X上のある C^∞級 p 次閉微分形式ϕが存在し Kのある近傍上で$\phi(\vec{\mathcal{F}}) > 0$ を満たす。

証明. $\mathfrak{m}_p(X)$ の部分集合 B_Kを

$$B_K = \{T \in \mathfrak{m}_p(X) | T : \mathcal{F}\text{の foliation current}, \operatorname{spt} T \subset K, \|T\|(K) = 1\}$$

とおく。

まず B_Kが $\mathfrak{m}_p(X)$ の凸部分集合になることを示そう。

$S, T \in B_K$をとる。$\operatorname{spt} S, \operatorname{spt} T \subset K$だから $t \in [0,1]$ に対して$\operatorname{spt}(tS + (1-t)T) \subset K$。

全変分測度の定め方より

$$\|tS + (1-t)T\| \le \|tS\| + \|(1-t)T\|$$

がわかる。各 $x \in X$に対して$\vec{\mathcal{F}}_x \in \wedge^p T_x X$の双対ベクトルを$\vec{\mathcal{F}}^*_x \in \wedge^p T^*_x X$で表すと $\vec{\mathcal{F}}^* \in \mathcal{E}^p(X)$ となる。さらに任意の $x \in X$に対して $\|\vec{\mathcal{F}}^*_x\|^* = 1$ が成り立つ。$f \in \mathcal{C}^0(X)$ について

$$\begin{aligned}
\|tS\|(f) &= \int_X f(x) d\|tS\|x = \int_X f(x) \vec{\mathcal{F}}^*_x(\vec{\mathcal{F}}_x) d\|tS\|x \\
&= \int_X f(x) \vec{\mathcal{F}}^*_x(\vec{S}_x) d\|tS\|x \quad (S : \mathcal{F}\text{の foliation current}) \\
&= t \int_X f(x) \vec{\mathcal{F}}^*_x(\vec{S}_x) d\|S\|x = tS(f\vec{\mathcal{F}}^*)
\end{aligned}$$

したがって

$$\|tS\|(f) = tS(f\vec{\mathcal{F}}^*).$$

同様に

$$\|(1-t)T\|(f) = (1-t)T(f\vec{\mathcal{F}}^*).$$

ここで $f \in \mathcal{E}^0(X)^+$とすると $f\vec{\mathcal{F}}^* \in \mathcal{E}^p(X), \|f\vec{\mathcal{F}}^*\|^* = f$となり

$$(\|tS\| + \|(1-t)T\|)(f) = (tS + (1-t)T)(f\vec{\mathcal{F}}^*) \le \|tS + (1-t)T\|(f).$$

$\mathcal{E}^0(X)^+$は $\mathcal{C}^0(X)^+$内で稠密だから任意の $f \in \mathcal{C}^0(X)^+$に対して

$$(\|tS\| + \|(1-t)T\|)(f) \le \|tS + (1-t)T\|(f).$$

以上で

$$\|tS\| + \|(1-t)T\| \le \|tS + (1-t)T\|$$

がわかり、先の結果とあわせると

$$\|tS\| + \|(1-t)T\| = \|tS + (1-t)T\|$$

を得る。

上の結果より

$$\|tS+(1-t)T\|(K)=\|tS\|(K)+\|(1-t)T\|(K)=t\|S\|(K)+(1-t)\|T\|(K)=1.$$

$\phi\in\mathcal{C}^p(X)$ に対して

$$\begin{aligned}(tS+(1-t)T)(\phi)&=\int_X\phi(\vec{S}_x)d\|tS\|x+\int_X\phi(\vec{T}_x)d\|(1-t)T\|x\\&=\int_X\phi(\vec{\mathcal{F}}_x)d\|tS\|x+\int_X\phi(\vec{\mathcal{F}}_x)d\|(1-t)T\|x\\&=\int_X\phi(\vec{\mathcal{F}}_x)d(\|tS\|+\|(1-t)T\|)x\\&=\int_X\phi(\vec{\mathcal{F}}_x)d\|tS+(1-t)T\|x.\end{aligned}$$

したがって

$$(tS+(1-t)T)\vec{_x}=\vec{\mathcal{F}}_x\quad\text{for }\|tS+(1-t)T\|\text{ a.a. }x\in X$$

となり $tS+(1-t)T$ は $\mathcal{F}$ の foliation current になる。以上で B_K は $\mathfrak{m}_p(X)$ の凸部分集合になることがわかった。

次に B_K は $\mathfrak{m}_p(X)$ の弱位相に関してコンパクトになることを示そう。

$$V=\{\phi\in\mathcal{C}^p(X)|\ \|\phi\|^*\le 1\text{ on }K\}$$

は $\mathcal{C}^p(X)$ における 0 の近傍になるので定理 1.15(Banach-Alaoglu) より

$$\{T\in\mathfrak{m}_p(X)|\ |T(\phi)|\le 1\text{ for }{}^\forall\phi\in V\}$$

は $\mathfrak{m}_p(X)$ の弱位相に関してコンパクト。また

$$\begin{aligned}&\{T\in\mathfrak{m}_p(X)|\operatorname{spt}T\subset K\}\\&=\cap\{\{T\in\mathfrak{m}_p(X)|T(\phi)=0\}|\phi\in\mathcal{C}^p(X),\operatorname{spt}\phi\subset X-K\}\end{aligned}$$

だから

$$\{T\in\mathfrak{m}_p(X)|\operatorname{spt}T\subset K\}$$

は $\mathfrak{m}_p(X)$ の弱位相に関して閉集合になる。したがって

$$B'_K=\{T\in\mathfrak{m}_p(X)|\operatorname{spt}T\subset K,|T(\phi)|\le 1\text{ for }{}^\forall\phi\in V\}$$

とおくと B'_K は $\mathfrak{m}_p(X)$ の弱位相に関してコンパクト。よって

$$\{T\in B'_K|T(\vec{\mathcal{F}}^*)=1\}$$

も $\mathfrak{m}_p(X)$ の弱位相に関してコンパクト。$T\in B'_K$ に対して

$$T(\vec{\mathcal{F}}^*)=\int_X\vec{\mathcal{F}}^*_x(\vec{T}_x)d\|T\|x\le\int_X 1d\|T\|=\|T\|(1)\le 1$$

よって

$$T(\vec{\mathcal{F}}^*) = 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{\mathcal{F}}_x^*(\vec{T}_x) = 1 \quad \text{for } \|T\| \text{ a.a. } x \in X \\ \text{and} \\ \|T\|(1) = 1 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{\mathcal{F}}_x = \vec{T}_x \quad \text{for } \|T\| \text{ a.a. } x \in X \\ \text{and} \\ \|T\|(K) = 1. \end{cases}$$

したがって

$$B_K = \{T \in B'_K | T(\vec{\mathcal{F}}^*) = 1\}$$

となり、B_K も $\mathfrak{m}_p(X)$ の弱位相に関してコンパクト。

$\mathcal{E}^p(X) \hookrightarrow \mathcal{C}^p(X)$ は連続だから命題 1.13 より $\mathfrak{m}_p(X) \hookrightarrow \mathcal{E}'_p(X)$ はそれぞれの弱位相に関して連続になる。よって B_K は $\mathcal{E}'_p(X)$ の弱位相に関してもコンパクトになる。

$d : \mathcal{E}^p(X) \longrightarrow \mathcal{E}^{p+1}(X)$ は連続だから命題 1.13 より $\partial : \mathcal{E}'_{p+1}(X) \longrightarrow \mathcal{E}'_p(X)$ はそれぞれの弱位相に関して連続になる。よって

$$Z_p(X) = \{T \in \mathcal{E}'_p(X) | \partial T = 0\}$$

は $\mathcal{E}'_p(X)$ の弱位相に関して閉部分ベクトル空間になる。

$$Z^p(X) = \{\alpha \in \mathcal{E}^p(X) | d\alpha = 0\}$$

とおくと de Rham の定理より

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{E}'_{p+1}(X) &= \{T \in Z_p(X) | \ {}^\forall\alpha \in Z^p(X)\ T(\alpha) = 0\} \\ &= \bigcap_{\alpha \in Z^p(X)} \{T \in \mathcal{E}'_p(X) | T(\alpha) = 0\} \cap Z_p(X) \end{aligned}$$

となるので $\partial\mathcal{E}'_{p+1}(X)$ は $\mathcal{E}'_p(X)$ の弱位相に関して閉部分ベクトル空間になる。

$B_K \cap \partial\mathcal{E}'_{p+1}(X) = \emptyset$ を示そう。もし $T \in B_K \cap \partial\mathcal{E}'_{p+1}(X)$ とすると $\partial T = 0$ となり T は $\mathcal{F}$ の zero homologous closed foliation current になる。$\mathcal{F}$ は homologically tight だから $T = 0$。ところが $0 \notin B_K$ だからこれは矛盾。したがって $B_K \cap \partial\mathcal{E}'_{p+1}(X) = \emptyset$。

命題 1.14 より $\mathcal{E}'_p(X)$ は弱位相に関して局所凸位相ベクトル空間になり、B_K は $\mathcal{E}'_p(X)$ のコンパクト凸部分集合で $\partial\mathcal{E}'_{p+1}(X)$ は $\mathcal{E}'_p(X)$ の閉部分ベクトル空間である。さらに $B_K \cap \partial\mathcal{E}'_{p+1}(X) = \emptyset$ で、命題 1.14 より $\mathcal{E}'_p(X)$ の双対空間は $\mathcal{E}^p(X)$ だから、定理 1.11(Hahn-Banach) よりある $\phi \in \mathcal{E}^p(X)$ が存在し

$$\begin{aligned} T(\phi) > 0 \quad & \text{for all } T \in B_K \\ T(\phi) = 0 \quad & \text{for all } T \in \partial\mathcal{E}'_{p+1}(X) \end{aligned}$$

を満たす。

任意の $S \in \mathcal{E}'_{p+1}(X)$ について $0 = \partial S(\phi) = S(d\phi)$。したがって $d\phi = 0$ となり ϕ は閉微分形式である。

各 $x \in K$ に対して x における Dirac 測度を δ_x で表すと $\vec{\mathcal{F}}\delta_x \in B_K$ となるので

$$0 < \vec{\mathcal{F}}\delta_x(\phi) = \phi_x(\vec{\mathcal{F}}_x).$$

よって K 上 $\phi(\vec{\mathcal{F}}) > 0$ となり K のある近傍上でも $\phi(\vec{\mathcal{F}}) > 0$ となる。