7 主定理の証明の代数的部分

7.1 命題. $\mathcal{F}$を X上の向きのついた p 次元 *foliation* とする。$\phi(\vec{\mathcal{F}}) > 0$ となる X上の C^∞級 p 次閉微分形式ϕが存在すれば、X上のある *Riemann* 計量が存在しその計量に関してϕは $\mathcal{F}$の *calibration* になる。

命題 7.1 の証明は補題 7.2 から補題 7.13 までの準備のあとで証明する。以下では Eを n 次元実ベクトル空間とし、$\langle\ ,\ \rangle$ を E上の内積とする。

7.2 補題. Vを Eの部分ベクトル空間とし$\xi \in G(p, E)$ とする。このときVの正規直交ベクトル $f_1, \dots, f_r$と $V^\perp$の正規直交ベクトル $g_1, \dots, g_s$と $0 < \theta_j < \pi/2$ $(j = 1, \dots, k)$ が存在し *(ただし* $k \le r, s \le p$, $r + s - k = p$*)*

$$\xi = (\cos\theta_1 f_1 + \sin\theta_1 g_1) \wedge \cdots \wedge (\cos\theta_k f_k + \sin\theta_k g_k) \wedge f_{k+1} \wedge \cdots \wedge f_r \wedge g_{k+1} \wedge \cdots \wedge g_s$$

を満たす。

証明. $P : E \longrightarrow V$を直交射影とする。$\operatorname{span}\xi$上の半正定値 2 次形式 Bを

$$B(u, v) = \langle P(u), P(v)\rangle \quad (u, v \in \operatorname{span}\xi)$$

で定義する。Bを対角化する$\operatorname{span}\xi$の正規直交基底 $e_1, \dots, e_p$をとり$\lambda_1, \dots, \lambda_p$を対応する Bの固有値とする。ξは unit simple vector だから$\xi = \pm e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$となる。任意の $u \in \operatorname{span}\xi$について $0 \le B(u, u) \le |u|^2$が成り立つので $0 \le \lambda_j \le 1$ が各 $j = 1, \dots, p$ について成り立つ。e_jの順序を適当にかえて$1 \le j \le k$のとき$0 < \lambda_j < 1$ で$\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_r = 1$, $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_p = 0$ となるようにできる。$1 \le j \le k$に対して$\lambda_j = \cos^2\theta_j$となるように $0 < \theta_j < \pi/2$ を選んでおく。すると $1 \le j \le k$ に対して $|P(e_j)|^2 = B(e_j, e_j) = \lambda_j = \cos^2\theta_j$。したがって一意的に単位ベクトル $f_j \in V, g_j \in V^\perp$が存在して $e_j = \cos\theta_j f_j + \sin\theta_j g_j$と表すことができる。$i \ne j$のとき $\langle P(e_i), P(e_j)\rangle = B(e_i, e_j) = 0$ だから $\langle f_i, f_j\rangle = 0$ となり $f_1, \dots f_k$はVの正規直交ベクトルである。さらに

$$\langle g_i, g_j\rangle = \langle e_i - P(e_i), e_j - P(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle - \langle P(e_i), P(e_j)\rangle = 0$$

だから $g_1, \dots g_k$は $V^\perp$の正規直交ベクトルである。$f_{k+1} = e_{k+1}, \dots, f_r = e_r$, $g_{k+1} = e_{r+1}, \dots, g_s = e_p$ とおくと $f_1, \dots f_r$はVの正規直交ベクトルで、$g_1, \dots g_s$は $V^\perp$の正規直交ベクトルである。$\xi = \pm e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$だから必要なら f_1と g_1を$-f_1$と$-g_1$に置き換えることにより補題の等式を満たす。

7.3 定義. $\phi \in \wedge^p E^*$に対して部分ベクトル空間 $V^* \subset E^*$が$\phi \in \wedge^p V^*$を満たしているとき V^*がϕを展開しているという。

7.4 命題. $\phi \in \wedge^p E^*$に対して

$$N(\phi) = \{v \in E |\ v \rfloor \phi = 0\}$$
$$\operatorname{span}\phi = \{\eta \rfloor \phi \mid \eta \in \wedge^{p-1} E\}$$

とおくと

$$N(\phi) = \{v \in E | \ {}^\forall f \in \operatorname{span}\phi \ f(v) = 0\}$$
$$\operatorname{span}\phi = \{f \in (E)^* | \ {}^\forall v \in N(\phi) \ f(v) = 0\}.$$

証明. $v \in E$と$\eta \in \wedge^{p-1}E$に対して

$$\langle \eta, v \rfloor \phi \rangle = \langle \eta \wedge v, \phi \rangle = (-1)^{p-1}\langle v \wedge \eta, \phi \rangle = (-1)^{p-1}\langle v, \eta \rfloor \phi \rangle$$

だから

$$\begin{aligned} v \in N(\phi) &\Longleftrightarrow {}^\forall \eta \in \wedge^{p-1}E \quad \langle \eta, v \rfloor \phi \rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow {}^\forall \eta \in \wedge^{p-1}E \quad \langle v, \eta \rfloor \phi \rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow {}^\forall f \in \operatorname{span}\phi \quad \langle v, f \rangle = 0. \end{aligned}$$

したがって

$$N(\phi) = \{v \in E | \ {}^\forall f \in \operatorname{span}\phi \ f(v) = 0\}.$$

これより

$$\operatorname{span}\phi = \{f \in (E)^* | \ {}^\forall v \in N(\phi) \ f(v) = 0\}.$$

7.5 命題. $\phi \in \wedge^p E^*$に対して$\operatorname{span}\phi$はϕを展開している最小の部分ベクトル空間である。

証明. まず$\operatorname{span}\phi$がϕを展開していることを示す。Eの基底 $e_1, \ldots, e_n$を $e_1, \ldots, e_k$が $N(\phi)$ の基底になっているようにとると、上で示したことより

$$\operatorname{span}\phi = \sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{R}e_j^*.$$

ϕを$\phi = \sum_I a_I e_I^*$と表しておく。$1 \leq i \leq k$となっている i を 1 つ固定しておく。$e_i \rfloor \phi = 0$ だから任意の$\eta \in \wedge^{p-1}E$に対して

$$\begin{aligned} 0 = \langle \eta, e_i \rfloor \phi \rangle &= \sum_I a_I \langle \eta, e_i \rfloor e_I^* \rangle \\ &= (-1)^{p-i} \sum_{I \ni i} a_I \langle e_i \wedge \eta, e_I^* \rangle = (-1)^{p-i} \sum_{I \ni i} a_I \langle \eta, e_{I-\{i\}}^* \rangle. \end{aligned}$$

よって $i \in I$ならば $a_I = 0$ となるので

$$\phi \in \bigwedge^p \left(\sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{R}e_j^* \right) = \wedge^p \operatorname{span}\phi.$$

次に $V^* \subset E^*$がϕを展開していると仮定しよう。

$$N(V^*) = \{v \in E | \ {}^\forall f \in V^* \ f(v) = 0\}$$

とおくと、$\phi \in \wedge^p V^*$より $N(V^*)$ の元 vに対して $v \rfloor \phi = 0$ となり $v \in N(\phi)$ が成り立つ。したがって $N(V^*) \subset N(\phi)$ で$\operatorname{span}\phi \subset V^*$。以上で$\operatorname{span}\phi$は$\phi$を展開している最小の部分ベクトル空間であることがわかった。

7.6 命題. $\phi \in \wedge^p E^*$に対して $G(\phi) = \{\xi \in G(p, E) |\ \phi(\xi) = ||\phi||^*\}$ とおくと $G(\phi) \subset \wedge^p(N(\phi)^\perp)$ が成り立つ。

証明. $\eta \in G(\phi)$ に対して $V = N(\phi)^\perp$とおいて補題 7.2 を適用すると $N(\phi)^\perp$の正規直交ベクトル $f_1, \dots, f_r$と $N(\phi)$ の正規直交ベクトル $g_1, \dots, g_s$と $0 < \theta_j < \pi/2$ $(j = 1, \dots, k)$ が存在し (ただし $k \leq r, s \leq p$, $r + s - k = p$)

$$\eta = (\cos\theta_1 f_1 + \sin\theta_1 g_1) \wedge \cdots \wedge (\cos\theta_k f_k + \sin\theta_k g_k) \wedge f_{k+1} \wedge \cdots \wedge f_r \wedge g_{k+1} \wedge \cdots \wedge g_s$$

を満たす。$g_j \in N(\phi)$ だから $g_j \rfloor \phi = 0$。$\phi(\eta) = ||\phi||^*$よりまず $k = s$、したがって $r = p$ でなければならない。さらに

$$\phi(\eta) = \cos\theta_1 \dots \cos\theta_k \phi(f_1 \wedge \cdots \wedge f_p)$$

だから $k = 0$ となって$\eta = f_1 \wedge \cdots \wedge f_p$。したがって$\eta \in \wedge^p(N(\phi)^\perp)$。

7.7 命題. $E = V \oplus W$を直交直和分解とし、$\phi \in \wedge^{p-q} V^*$をとり$\psi \in \wedge^q W^*$を *unit simple vector* とする。このとき$\phi \wedge \psi \in \wedge^p E^*$は $\|\phi \wedge \psi\|^* = ||\phi||^*$を満たし、$\eta \in \wedge^q W$を$\psi$の *dual unit simple vector* とすると

$$G(\phi \wedge \psi) = \{\xi \wedge \eta \mid \xi \in G(\phi)\}$$

が成り立つ。

証明. $N(\psi) \subset N(\phi \wedge \psi)$ より $N(\phi \wedge \psi)^\perp \subset N(\psi)^\perp$。よって $G(\phi \wedge \psi)$ の元を特徴づけるためには命題 7.6 より $N(\psi)^\perp$で考えれば十分。したがって $N(\psi) = \{0\}$ つまり $W^* = \operatorname{span}\psi$としてよい。$\psi$は simple vector だから$\dim \operatorname{span}\psi = q$。

Vと任意の$\xi \in G(p, E)$ に対して補題 7.2 を適用すると Vの正規直交ベクトル $f_1, \dots, f_r$と Wの正規直交ベクトル $g_1, \dots, g_s$と $0 < \theta_j < \pi/2$ $(j = 1, \dots, k)$ が存在し (ただし $k \leq r, s \leq p$, $r + s - k = p$)

$$\xi = (\cos\theta_1 f_1 + \sin\theta_1 g_1) \wedge \cdots \wedge (\cos\theta_k f_k + \sin\theta_k g_k) \wedge f_{k+1} \wedge \cdots \wedge f_r \wedge g_{k+1} \wedge \cdots \wedge g_s$$

を満たす。$g_1, \dots, g_s \in W$より $s \leq q$。$s < q$とすると $(\phi \wedge \psi)(\xi) = 0$ となる。$s = q$ のときは$\psi(g_1 \wedge \cdots \wedge g_q) = \pm 1$ で、必要ならば f_iの符号もかえて$\psi(g_1 \wedge \cdots \wedge g_q) = 1$ とでき

$$\begin{aligned}(\phi \wedge \psi)(\xi) &= \pm \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_k \phi(f_{k+1} \wedge \cdots \wedge f_r) \\ &\leq \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_k ||\phi||^* \leq ||\phi||^*.\end{aligned}$$

よって $\|\phi \wedge \psi\|^* \leq ||\phi||^*$となる。さらに上の不等式で等号が成立するためには少なくとも $k = 0$ でなければならない。このとき$\xi = f_1 \wedge \cdots \wedge f_{p-q} \wedge g_1 \wedge \cdots \wedge g_q$ となり、$(\phi \wedge \psi)(\xi) = ||\phi||^*$となるための必要十分条件は $f_1 \wedge \cdots \wedge f_{p-q} \in G(\phi)$ である。よってこのような元は存在し命題が証明された。

7.8 命題. $e_1, \dots, e_n$を Eの正規直交基底とし $2p \leq n$ としておく。

$$\phi = \lambda e_1^* \wedge \cdots \wedge e_p^* + \mu e_{p+1}^* \wedge \cdots \wedge e_{2p}^* \in \wedge^p E^*$$

とおくと $p \geq 2$ のとき $\|\phi\|^* = \max\{|\lambda|, |\mu|\}$ が成り立つ。

7.9 注意. $p=1$ のときは$\lambda e_1^* + \mu e_2^* = (\lambda e_1 + \mu e_2)^*$となり、この *comass* は$\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$である。

証明. $N(\phi)^\perp = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_{2p}\}$ となるので命題 7.6 より $n=2p$ としても一般性は失われない。$V = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_p\}$ とおいて$\xi \in G(p, E)$ と Vに補題 7.2 を適用すると Vの正規直交ベクトル $f_1, \ldots, f_r$と $V^\perp$の正規直交ベクトル $g_1, \ldots, g_s$と $0 < \theta_j < \pi/2$ $(j = 1, \ldots, k)$ が存在し (ただし $k \le r, s \le p$, $r + s - k = p$)

$$\xi = (\cos\theta_1 f_1 + \sin\theta_1 g_1) \wedge \cdots \wedge (\cos\theta_k f_k + \sin\theta_k g_k) \wedge f_{k+1} \wedge \cdots \wedge f_r \wedge g_{k+1} \wedge \cdots \wedge g_s$$

を満たす。$\dim V = \dim V^\perp = p$ だから $r, s \le p$。さらに $r, s < p$ のときは$\phi(\xi) = 0$ となる。$r = p, s < p$ のときは

$$\xi = (\cos\theta_1 f_1 + \sin\theta_1 g_1) \wedge \cdots \wedge (\cos\theta_k f_k + \sin\theta_k g_k) \wedge f_{k+1} \wedge \cdots \wedge f_p$$

となるので

$$\phi(\xi) = \pm\lambda \cos\theta_1 \cdots \cos\theta_k \le |\lambda|.$$

$s = p, r < p$ のときも同様にして$\phi(\xi) \le |\mu|$ となる。そこで $r = s = p$ の場合を考えよう。このときは $k = p$ となり

$$\begin{aligned}
\phi(\xi) &= \pm\lambda\cos\theta_1 \cdots \cos\theta_p \pm \mu \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_p \\
&\le [\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1]^{1/2} [\lambda^2 \cos^2\theta_2 \cdots \cos^2\theta_p + \mu^2 \sin^2\theta_2 \cdots \sin^2\theta_p]^{1/2} \\
&= [\lambda^2 \cos^2\theta_2 \cdots \cos^2\theta_p + \mu^2 \sin^2\theta_2 \cdots \sin^2\theta_p]^{1/2} \\
&\le |\lambda\cos\theta_2 \cdots \cos\theta_p| + |\mu\sin\theta_2 \cdots \sin\theta_p|.
\end{aligned}$$

以下同じ操作を繰り返すことにより$\phi(\xi) \le \max\{|\lambda|, |\mu|\}$ を得る。したがって $\|\phi\|^* \le \max\{|\lambda|, |\mu|\}$ である。さらに$\xi = e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$または$\xi = e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_{2p}$とすると $\phi(\xi) = \max\{|\lambda|, |\mu|\}$ が成り立ち $\|\phi\|^* = \max\{|\lambda|, |\mu|\}$ である。

7.10 補題. $e_1, \ldots, e_n$を Eの正規直交基底とし、双対基底を $e_1^*, \ldots, e_n^*$で表す。$I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ $(i_1 < \cdots < i_p)$ に対して $e_I^* = e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^*$とおく。$\mathrm{card}(I \cap J) \le p-2$ のとき

$$\|\lambda e_I^* + \mu e_J^*\|^* = \max\{|\lambda|, |\mu|\}$$

が成り立つ。

証明. $\mathrm{card}(I \cap J) \le p-2$ だから

$$\begin{aligned}
e_I^* &= e_1^* \wedge \cdots \wedge e_p^*, \\
e_J^* &= e_1^* \wedge \cdots \wedge e_{p-l}^* \wedge e_{p+1}^* \wedge \cdots \wedge e_{p+l}^* \quad (l \ge 2)
\end{aligned}$$

としてよい。

$$\lambda e_I^* + \mu e_J^* = e_1^* \wedge \cdots \wedge e_{p-l}^* \wedge (\lambda e_{p-l+1}^* \wedge \cdots \wedge e_p^* + \mu e_{p+1}^* \wedge \cdots \wedge e_{p+l}^*)$$

となり、$l \ge 2$ だから命題 7.8 より

$$\|\lambda e_{p-l+1}^* \wedge \cdots \wedge e_p^* + \mu e_{p+1}^* \wedge \cdots \wedge e_{p+l}^*\|^* = \max\{|\lambda|, |\mu|\}$$

が成り立つ。したがって命題 7.7 より

$$\|\lambda e_I^* + \mu e_J^*\|^* = \max\{|\lambda|, |\mu|\}.$$

7.11 系. $i_{p-1} \leq p$ のとき $b_I = 0$ とすると

$$\left\| e_1^* \wedge \cdots \wedge e_p^* + \sum_I b_I e_I^* \right\|^* \leq \max \left\{ 1, \sum_I |b_I| \right\}$$

が成り立つ。

証明. $B = \sum_I |b_I|$, $\epsilon_I = \operatorname{sign} b_I$, $\phi = e_1^* \wedge \cdots \wedge e_p^*$とおく。

$$\left\| \phi + \sum_I b_I e_I^* \right\|^* = \left\| \sum_I |b_I| \left(\frac{1}{B}\phi + \epsilon_I e_I^* \right) \right\|^* \leq \sum_I |b_I| \left\| \frac{1}{B}\phi + \epsilon_I e_I^* \right\|^*.$$

仮定より $b_I \neq 0$ ならばcard$(\{1, \ldots, p\} \cap I) \leq p - 2$ となるので補題 7.10 より

$$\left\| \frac{1}{B}\phi + \epsilon_I e_I^* \right\|^* = \max \left\{ \frac{1}{B}, 1 \right\}.$$

したがって

$$\left\| \phi + \sum_I b_I e_I^* \right\|^* \leq \sum_I |b_I| \max \left\{ \frac{1}{B}, 1 \right\} = \max\{1, B\}.$$

7.12 補題. $\xi \in \wedge^p E$を *simple vector* とし $V = \operatorname{span} \xi$とおく。$\phi \in \wedge^p E^*$が$\phi(\xi) = 1$を満たすとする。このとき次の条件を満たす Vの補空間 Wが一意的に存在する。$\xi = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$で $v_{p+1}, \ldots, v_n$が Wの基底になるような Eの任意の基底 $v_1, \ldots, v_n$に対して $i_{p-1} \leq p$ ならば $a_I = 0$ となるような $\{a_I\}$ を使ってϕを

$$\phi = v_1^* \wedge \cdots \wedge v_p^* + \sum_I a_I v_I^*$$

と表すことができる。

証明. $\eta \in \wedge^{p-1} V$, $v \in E$に対して$\lambda(\eta)(v) = \phi(\eta \wedge v)$ とおくことによって線形写像

$$\lambda : \wedge^{p-1} V \longrightarrow E^*$$

を定義する。$\xi = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$となる $v_1, \ldots, v_p \in V$をとって $1 \leq i \leq p$ について $\eta_i = (-1)^{p-i} v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_p$ とおく。すると $\{\eta_i\}$ は$\wedge^{p-1}V$の基底になる。$\lambda_i = \lambda(\eta_i) \in E^*$とおく。

$$\begin{aligned} \lambda_i(v_j) =& (-1)^{p-i} \phi(v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_p \wedge v_j) \\ =& \delta_{ij} \phi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \delta_{ij} \end{aligned}$$

となるので $(\lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_p)(\xi) = 1$。したがって$\lambda_1, \ldots, \lambda_p$は 1 次独立になる。そこで $W = \cap_{i=1}^p \ker(\lambda_i)$ とおくと $V \cap W = \{0\}$ であり、$\dim V + \dim W = n$ だから $E = V \oplus W$。$v_{p+1}, \ldots, v_n$を Wの基底とすると $1 \leq i \leq p$ と $p + 1 \leq j \leq n$ に対して $v_j \in W$だから

$$\phi(v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_p \wedge v_j) = (-1)^{p-i} \lambda_i(v_j) = 0.$$

したがって

$$\phi = v_1^* \wedge \cdots \wedge v_p^* + \sum_I a_I v_I^*$$

と表すと $i_{p-1} \leq p$ ならば $a_I = 0$ となる。Wの一意性は上の Wの定め方よりわかる。

7.13 補題. *ϕ, $V = \operatorname{span}\xi$, Wを補題 7.12 のようにとる。Eの内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を $V \perp W$と $\|\xi\| = 1$ を満たすようにとる。*

$$C^2 \geq \binom{n}{p} \|\phi\|^*$$

を満たす定数 Cに対して $E = V \oplus W$上の内積を

$$\langle\ ,\ \rangle_1 = \langle\ ,\ \rangle_V + C^2\langle\ ,\ \rangle_W$$

によって定めるとこの内積 $\langle\ ,\ \rangle_1$に関して

$$\|\phi\|_1^* = 1 \quad and \quad \phi(\xi) = \|\xi\| = 1$$

が成り立つ。

証明. $\|\xi\| = 1$ だから Eの正規直交基底 $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ を$\xi = \epsilon_1 \wedge \cdots \wedge \epsilon_p$となるようにとることができる。補題 7.12 より $i_{p-1} \leq p$ ならば $a_I = 0$ となるような $\{a_I\}$ を使ってϕを

$$\phi = \epsilon_1^* \wedge \cdots \wedge \epsilon_p^* + \sum_I a_I \epsilon_I^*$$

と表すことができる。$|a_I| = |\phi(\epsilon_I)| \leq \|\phi\|^*$に注意しておく。

$$e_j = \begin{cases} \epsilon_j, & j = 1, \ldots, p \\ \frac{1}{C}\epsilon_j, & j = p+1, \ldots, n \end{cases}$$

とおくと $\{e_j\}$ は新しい内積 $\langle\ ,\ \rangle_1$に関する正規直交基底になる。$1 \leq j \leq p$ ならば $e_j^* = \epsilon_j^*$で $p+1 \leq j \leq n$ ならば $e_j^* = C\epsilon_j^*$だから

$$\phi = e_1^* \wedge \cdots \wedge e_p^* + \sum_I b_I e_I^*$$

と表すと、$i_{p-1} \leq p$ ならば $b_I = 0$ となる。また$\phi(\xi) = 1$, $\|\xi\| = 1$ より $\|\phi\|^* \geq 1$。したがって $C \geq 1$ だから $|b_I| \leq (1/C^2)|a_I|$。系 7.11 より

$$\|\phi\|_1^* \leq \max\left\{1, \sum_I |b_I|\right\} \leq \max\left\{1, \frac{1}{C^2}\sum_I |a_I|\right\}.$$

ここで $|a_I| \leq \|\phi\|^*$だから

$$\frac{1}{C^2}\sum_I |a_I| \leq \frac{1}{C^2}\binom{n}{p}\|\phi\|^* \leq 1$$

となり $\|\phi\|_1^* \leq 1$。他方$\phi(\xi) = 1$ だから $\|\phi\|_1^* = 1$。

命題 7.1 の証明. $f = \phi(\vec{\mathcal{F}}) \in \mathcal{E}^0(X)$ とおくと $f > 0$ だから Xの Riemann 計量に $f^{2/p}$ をかけることができ、この Riemann 計量に関して $f^{-1}\vec{\mathcal{F}}$が $\mathcal{F}$に接する unit simple vector field になる。$\phi(f^{-1}\vec{\mathcal{F}}) = 1$ となるので Riemann 計量をとりかえることにより

$\phi(\vec{\mathcal{F}}) = 1$ とできる。各 $x \in X$ において $\vec{\mathcal{F}}_x$, ϕ_x に補題 7.12 を適用し $W_x \subset T_x X$ を定める。W_x が決める plane field を ν とする。X 上の局所的な C^∞ 級ベクトル場 $v_1, \ldots, v_p$ を $\vec{\mathcal{F}} = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ を満たすようにとる。補題 7.12 で構成した λ_i は X 上の局所的な C^∞ 級 1 次微分形式になり、$\nu = \cap_{i=1}^{p} \ker(\lambda_i)$ となる。各 λ_i を TX 上の関数とみなすと C^∞ 級になり $d\lambda_i$ は 1 次独立になる。したがって陰関数定理より ν は C^∞ 級 plane field になる。$\mathcal{F}$ が決める plane field を τ とすると $TX = \tau \oplus \nu$ となっている。

各 O_i 上で $\tau \perp \nu$ と $\|\vec{\mathcal{F}}\| = 1$ を満たすように取り直した Riemann 計量を g_i で表し 1 の分割 $\{h_i\}$ を $\operatorname{spt} h_i \subset U_i$ となるようにとり、$g' = \sum_i h_i g_i$ とおく。すると g' に関して X 全体で $\tau \perp \nu$ と $\|\vec{\mathcal{F}}\| = 1$ が成り立つ。

$$\binom{n}{p} \|\phi_x\|^* \leq C(x)^2 \qquad (x \in X)$$

を満たす X 上の C^∞ 級関数 C をとり $g = g'_\tau + C^2 g_\nu$ とおくと補題 7.13 よりこの Riemann 計量 g に関して X 全体で

$$\|\phi\|^* = 1 \quad \text{and} \quad \phi(\vec{\mathcal{F}}) = \|\vec{\mathcal{F}}\| = 1$$

が成り立つ。したがって ϕ は g に関して $\mathcal{F}$ の calibration になる。

参考文献

R. Harvey and H. B. Lawson Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math. **148** (1982), 47-157.