微分幾何学 III（大学院）　講義ノート　1991/4/17

第 1 部 コンパクト位相群の表現

1 位相群の表現

1.1 定義. 位相ベクトル空間 V（係数体は実数または複素数）の連続線形同型写像の全体がつくる群を V の一般線形群と呼び $GL(V)$ で表す。（今後特にことわらない限りベクトル空間の係数体は実数または複素数だけを考える。）

1.2 注意. 有限次元ベクトル空間 V に対しては $\mathbb{R}^{\dim V}$ または $\mathbb{C}^{\dim V}$ に同型になる位相が一意的に存在するので、この場合は位相を特に指定する必要がない。また有限次元の場合は部分ベクトル空間は必ず閉集合になることにも注意しておく。

1.3 定義. 位相群 G（位相群の位相は *Hausdorff* の公理を満たすもののみ考える）から位相ベクトル空間 V の一般線形群 $GL(V)$ への群の準同型写像 ρ が

$$G \times V \longrightarrow V; (g, v) \longmapsto \rho(g)v : \text{連続}$$

を満たすとき ρ を G の V 上の表現と呼び、V を ρ の表現空間と呼ぶ。V が有限次元のとき ρ を有限次元表現と呼ぶ。表現空間を明記したいときは表現を (ρ, V) で表すこともある。V が内積空間で任意の $g \in G$ に対して $\rho(g)$ が V の等長変換になっているとき係数体が実数の場合に ρ を直交表現と呼び、係数体が複素数の場合に ρ をユニタリ表現と呼ぶ。

1.4 定義. 位相群 G の表現 (ρ, V) と (σ, W) に対して V から W への連続線形写像 A が任意の $g \in G$ について $A \circ \rho(g) = \sigma(g) \circ A$ を満たすとき A を V から W への G 準同型写像と呼ぶ。V から W への G 準同型写像の全体を $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ で表す。G 準同型写像が線形同型写像になっているとき G 同型写像と呼ぶ。V から W への G 同型写像が存在するとき ρ と σ を同値な表現といい $(\rho, V) \simeq (\sigma, W)$ で表す。(ρ, V) と (σ, W) が直交（ユニタリ）表現で V から W への等長的な G 同型写像が存在するとき ρ と σ を直交（ユニタリ）同値な表現という。

1.5 定義. (ρ, V) を位相群 G の表現とし、W を V の部分ベクトル空間とする。任意の $g \in G$ に対して $\rho(g)W \subset W$ が成り立つとき W を不変部分ベクトル空間と呼ぶ。V が $\{0\}$ と V 以外に閉不変部分ベクトル空間を持たないとき表現 (ρ, V) は既約であるという。

1.6 補題 (Schur). (ρ, V) と (σ, W) を位相群 G の有限次元既約表現とすると、V から W への G 準同型写像は 0 または G 同型写像である。V の恒等写像を I_V で表すと係数体が複素数の場合は $\mathrm{Hom}_G(V, V) = \mathbb{C}I_V$ となる。

証明. $A \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ をとると $\mathrm{Ker}\, A$ と $\mathrm{Im}\, A$ はそれぞれ V と W の不変部分ベクトル空間になる。V と W は既約だから $\mathrm{Ker}\, A = V, \mathrm{Im}\, A = \{0\}$ または $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}, \mathrm{Im}\, A = W$ となる。したがって A は 0 または G 同型写像である。係数体が複素数の場合、$B \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$ の固有空間は不変部分ベクトル空間になるので、B は V をただ 1 つの固有空間として持つ。したがって $\mathrm{Hom}_G(V, V) = \mathbb{C}I_V$ である。

1.7 系. (ρ, V) と (σ, W) を位相群 G の有限次元既約表現とすると次が成り立つ。

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) \begin{cases} = 0 & (\rho, V) \not\simeq (\sigma, W) \\ = 1 & (\rho, V) \simeq (\sigma, W), \text{係数体は複素数} \\ \geq 1 & (\rho, V) \simeq (\sigma, W), \text{係数体は実数} \end{cases}$$

証明. 補題 1.6 より $(\rho, V) \not\simeq (\sigma, W)$ のときは$\mathrm{Hom}_G(V, W) = \{0\}$ となり、$(\rho, V) \simeq (\sigma, W)$ のときは$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) \geq 1$。さらに係数体が複素数の場合は 0 ではない元 $A, B \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ を 2 つとると $B^{-1} \circ A \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$ となり、補題 1.6 より $A = cB$ $(c \in \mathbb{C})$ となる。したがって$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = 1$。

1.8 補題. (ρ, V) を位相群 G の有限次元既約直交（ユニタリ）表現とし、$\langle\ ,\ \rangle$ を V の内積とする。V上のもう *1* つの内積 $h(\ ,\ )$ が

$$h(\rho(g)v, \rho(g)w) = h(v, w) \qquad (v, w \in V)$$

を満たすとすると、ある正の定数 c が存在し $h(\ ,\ ) = c\langle\ ,\ \rangle$ となる。

証明. 線形写像 $A : V \longrightarrow V$を

$$h(v, w) = \langle Av, w\rangle \qquad (v, w \in V)$$

によって定めると、A は G 準同型写像になる。A は正の固有値を持つ自己随伴線形写像になり、Vは既約だから、ある正の定数 c が存在し $A = cI_V$となる。したがって $h(\ ,\ ) = c\langle\ ,\ \rangle$ となる。

1.9 例. (ρ, V), (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) を位相群 G の有限次元表現とする。$g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} &(\rho^*(g)f)(v) = f(\rho(g^{-1})v) \qquad (f \in V^*, v \in V) \\ &(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v_1 \oplus v_2) = (\rho_1(g)v_1) \oplus (\rho_2(g)v_2) \qquad (v_1 \in V_1, v_2 \in V_2) \\ &(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(v_1 \otimes v_2) = (\rho_1(g)v_1) \otimes (\rho_2(g)v_2) \qquad (v_1 \in V_1, v_2 \in V_2) \end{aligned}$$

としてρ^*, $\rho_1 \oplus \rho_2$, $\rho_1 \otimes \rho_2$を定めるとこれらは G の有限次元表現になる。ρ^*, $\rho_1 \oplus \rho_2$, $\rho_1 \otimes \rho_2$をそれぞれ (ρ, V) の反傾表現、(ρ_1, V_1) と (ρ_2, V_2) の直和表現、テンソル積表現と呼ぶ。V_1から V_2への連続線形写像の全体を$\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ で表し、$g \in G$ に対して

$$(\rho_3(g)A)(v_1) = \rho_2(g) \circ A \circ \rho_1(g^{-1})(v_1) \qquad (A \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2), v_1 \in V_1)$$

としてρ_3を定めると $(\rho_3, \mathrm{Hom}(V_1, V_2))$ は G の有限次元表現になる。これは $(\rho_1^* \otimes \rho_2, V_1^* \otimes V_2)$ と同値になる。定義 *1.4* で定めた G 準同型写像の全体は

$$\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \{A \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2) | \rho_3(g)A = A (g \in G)\}$$

と表すことができる。(ρ, V), (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) が直交（ユニタリ）表現のときは自然にρ^*, $\rho_1 \oplus \rho_2$, $\rho_1 \otimes \rho_2$も直交（ユニタリ）表現になる。

1.10 注意. 例 *1.9* では *2* つの表現の直和表現とテンソル積表現を定義したが、*3* つ以上の表現の直和表現とテンソル積表現も帰納的に定義することができる。その際に表現 (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2), (ρ_3, V_3) に対して $((\rho_1 \oplus \rho_2) \oplus \rho_3, (V_1 \oplus V_2) \oplus V_3)$ と $(\rho_1 \oplus (\rho_2 \oplus \rho_3), V_1 \oplus (V_2 \oplus V_3))$ とは表現として同値であり、$((\rho_1 \otimes \rho_2) \otimes \rho_3, (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3)$ と $(\rho_1 \otimes (\rho_2 \otimes \rho_3), V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3))$ とも表現として同値である。したがって直和やテンソル積をとる順序を明記する必要はない。

1.11 定義. (ρ, V) を位相群 G の表現とし (ρ_i, V_i) を G の表現の族とする。各 i について単射 $A_i \in \mathrm{Hom}_G(V_i, V)$ が存在し和 $V' = \sum_i A_i(V_i)$ が直和になりしかも V'が V内で稠密なとき、Vは (ρ_i, V_i) の直和に分解されるといい $V = \oplus_i V_i$と表す。さらに (ρ, V) と (ρ_i, V_i) が直交（ユニタリ）表現で各 A_iが等長的で $V' = \sum_i A_i(V_i)$ が直交直和になっているとき、Vは (ρ_i, V_i) の直交（ユニタリ）直和に分解されるという。また直和分解 $V = \oplus_i V_i$の各成分 (ρ_i, V_i) が既約表現のとき、この分解を既約分解と呼ぶ。

1.12 定理. (ρ_i, V_i) を位相群 G の互いに同値ではない有限次元既約表現の有限族とする。m_i, n_iを 0 以上の整数とし $m_i V_i$で V_iの m_i個の直和を表す。G の有限次元表現 (ρ, V) が *2* つの既約分解$\oplus_i m_i V_i$と$\oplus_i n_i V_i$を持てばすべての i について $m_i = n_i$が成り立つ。

証明. $\oplus_i m_i V_i = \oplus_i n_i V_i$だから jを 1 つ固定すると

$$\mathrm{Hom}_G(V_j, \oplus_i m_i V_i) = \mathrm{Hom}_G(V_j, \oplus_i n_i V_i)$$

が成り立つ。したがって

$$\oplus_i m_i \mathrm{Hom}_G(V_j, V_i) = \oplus_i n_i \mathrm{Hom}_G(V_j, V_i)$$

となり系 1.7 より $m_j \mathrm{Hom}_G(V_j, V_j) = n_j \mathrm{Hom}_G(V_j, V_j)$。したがって $m_j = n_j$である。

1.13 定理. 位相群の有限次元直交（ユニタリ）表現は既約直交（ユニタリ）表現の直交（ユニタリ）直和に分解される。

証明. (ρ, V) を位相群 G の有限次元直交表現とし定理を$\dim V$に関する帰納法で証明する。$\dim V = 1$ の場合は (ρ, V) 自身が既約になる。そこで$\dim V$より低い次元を持つ G の直交表現に対しては定理の主張が成立していると仮定して、(ρ, V) に対しても成立することを証明しよう。(ρ, V) が既約ならば定理の主張は成立している。(ρ, V) が既約でないならば $\{0\}$ でも Vでもない不変部分ベクトル空間 Wをとることができる。(ρ, V) は直交表現だから Wの直交補空間 $W^\perp$も不変部分ベクトル空間になる。$V = W + W^\perp$は直交直和になり帰納法の仮定より Vは既約表現の直交直和に分解される。

有限次元ユニタリ表現の場合も同様にして証明できる。

1.14 定理. 位相群の *2* つの有限次元直交（ユニタリ）表現が同値ならば直交（ユニタリ）同値になる。

証明. (ρ, V) と (σ, W) を位相群 G の有限次元直交表現とする。定理 1.13 よりρとσはそれぞれ直交既約表現 (ρ_i, V_i) と (σ_i, W_i) の直交直和に分解される。定理 1.12 よりすべての i について $(\rho_i, V_i) \simeq (\sigma_i, W_i)$ としてよい。$A_i : V_i \longrightarrow W_i$を G 同型写像とし、V_i, W_iの内積をそれぞれ $\langle\ ,\ \rangle_i$, $(\ ,\ )_i$とすると、$(\ ,\ )_i$の A_iによる引き戻し $A_i^*(\ ,\ )_i$は G の作用で不変な V_iの内積になる。よって補題 1.8 よりある正の定数 c_iが存在し $A_i^*(\ ,\ )_i = c_i\langle\ ,\ \rangle_i$となる。これより、$c_i^{-\frac{1}{2}} A_i$は等長的になり (ρ_i, V_i) と (σ_i, W_i) は直交同値になる。したがって (ρ, V) と (σ, W) も直交同値になる。

有限次元ユニタリ表現の場合も同様にして証明できる。

1.15 例. (ρ_1, V_1) を位相群 G_1の有限次元表現とし (ρ_2, V_2) を位相群 G_2の有限次元表現とする。$(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$に対して

$$(\rho_1 \hat{\otimes} \rho_2)(g_1, g_2)(v_1 \otimes v_2) = (\rho_1(g_1)v_1) \otimes (\rho_2(g_2)v_2) \qquad (v_1 \in V_1, v_2 \in V_2)$$

として$\rho_1 \hat{\otimes} \rho_2$を定めるとこれは $G_1 \times G_2$の有限次元表現になる。$\rho_1 \hat{\otimes} \rho_2$を$\rho_1$と$\rho_2$の外部テンソル積表現と呼ぶ。$(\rho_1, V_1)$, (ρ_2, V_2) が直交（ユニタリ）表現のときは自然に$\rho_1 \hat{\otimes} \rho_2$も直交（ユニタリ）表現になる。

1.16 定理. G_1, G_2を位相群とする。$G_1 \times G_2$の有限次元既約ユニタリ表現 (ρ, V) に対して G_iの有限次元既約ユニタリ表現 (ρ_i, V_i) が存在し $(i = 1, 2)$、(ρ, V) は $(\rho_1 \hat{\otimes} \rho_2, V_1 \otimes V_2)$ と同値になる。逆に G_iの有限次元既約ユニタリ表現 (ρ_i, V_i) に対して $(\rho_1 \hat{\otimes} \rho_2, V_1 \otimes V_2)$ は有限次元既約ユニタリ表現になる。

証明. (ρ, V) を $G_1 \times G_2$の有限次元既約ユニタリ表現とする。

$$\tilde{\rho}_1(g_1) = \rho(g_1, e) \qquad (g_1 \in G_1)$$

によって G_1の V上のユニタリ表現$\tilde{\rho}_1$を定める。Vは有限次元だから定理 1.13 より $(\tilde{\rho}_1, V)$ は G_1の既約ユニタリ表現の直交直和 $V = \oplus_{i=1}^n W_i$に分解される。

$$S = \{U | U : V\text{の } G_1\text{不変部分ベクトル空間}, \mathrm{Hom}_{G_1}(W_1, U) = \{0\}\}$$

とおいて Vの部分ベクトル空間 $W = \sum_{U \in S} U$を定める。$(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$に対して

$$\rho(g_1, g_2) = \tilde{\rho}_1(g_1) \circ \rho(e, g_2) = \rho(e, g_2) \circ \tilde{\rho}_1(g_1)$$

だから$\rho(e, g_2) : V \longrightarrow V$は G_1同型写像になる。$U \in S$をとると

$$\rho(g_1, g_2)U = \tilde{\rho}_1(g_1)(\rho(e, g_2)U) = \rho(e, g_2)U$$

となり、$\rho(e, g_2)U$は G_1不変部分ベクトル空間になる。さらに$\rho(e, g_2)|_U : U \longrightarrow \rho(g_1, g_2)U$は G_1同型写像だから$\rho(g_1, g_2)U \in S$。したがって Wは $G_1 \times G_2$不変部分ベクトル空間である。ρは既約だから Wの定め方より $W = \{0\}$ となる。これより各 W_iは G_1の表現として W_1と同値になる。$V_1 = W_1$としρ_1を$\tilde{\rho}_1$の作用の V_1への制限とすると (ρ_1, V_1) は G_1の有限次元既約ユニタリ表現になる。$A, B \in \mathrm{Hom}(V_1, V)$ に対して B^*で Bの随伴線形写像を表し $(A, B) = \mathrm{tr}(AB^*)$ によって$\mathrm{Hom}(V_1, V)$ 上の内積を定める。G_2の$\mathrm{Hom}(V_1, V)$ 上への表現$\tilde{\rho}_2$を

$$\tilde{\rho}_2(g_2)(A) = \rho(e, g_2) \circ A \qquad (g_2 \in G_2, A \in \mathrm{Hom}(V_1, V))$$

によって定めると $(\tilde{\rho}_2, \mathrm{Hom}(V_1, V))$ は有限次元ユニタリ表現になる。そこで $V_2 = \mathrm{Hom}_{G_1}(V_1, V)$ とすると V_2は$\mathrm{Hom}(V_1, V)$ の G_2不変部分ベクトル空間になり、ρ_2を$\tilde{\rho}_2$の作用の V_2への制限とすると (ρ_2, V_2) は G_2の有限次元ユニタリ表現になる。Vの各 G_1既約成分がρ_1に同値になることと系 1.7 とより V_2の次元は G_1既約成分の個数 n に等しい。ここで

$$\varphi : V_1 \otimes V_2 \longrightarrow V; v \otimes A \longmapsto A(v)$$

によって線形写像φを定めると、φは$(\rho_1\hat{\otimes}\rho_2, V_1\otimes V_2)$から$(\rho, V)$への$G_1\times G_2$準同型写像になる。$V_1$は$V$の$G_1$既約成分だから$V_2$には$0$ではない元が存在し$\varphi\neq 0$がわかる。$(\rho, V)$は既約だから$\varphi$は全射になる。ところが

$$\dim(V_1\otimes V_2)=\dim(V_1)n=\dim(V)$$

だからφは$G_1\times G_2$同型写像になる。このことから(ρ_2, V_2)が既約になることもわかる。

今度は逆に(ρ_i, V_i)をG_iの有限次元既約ユニタリ表現とする。

$$\tilde{\rho}_1(g_1)=(\rho_1\hat{\otimes}\rho_2)(g_1, e)\qquad (g_1\in G_1)$$

によってG_1の有限次元ユニタリ表現$(\tilde{\rho}_1, V_1\otimes V_2)$を定めると$V_1\otimes V_2=(\dim(V_2))V_1$となる。$W$を$V_1\otimes V_2$の$\{0\}$ではない$G_1\times G_2$不変部分ベクトル空間とする。$W$と$W^\perp$を既約分解すると（定理1.13)、定理1.12よりある自然数kが存在して$W=kV_1$となる。次にG_2の$\mathrm{Hom}_{G_1}(V_1, V_1\otimes V_2)$上への表現$\tilde{\rho}_2$を

$$\tilde{\rho}_2(g_2)(A)=\rho(e, g_2)\circ A\qquad (g_2\in G_2, A\in \mathrm{Hom}_{G_1}(V_1, V_1\otimes V_2))$$

によって定め、線形写像$\psi : V_2\longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_1}(V_1, V_1\otimes V_2)$を

$$\psi(v_2)(v_1)=v_1\otimes v_2\qquad (v_1\in V_1, v_2\in V_2)$$

として定めるとψはG_2準同型写像になる。また$\mathrm{Hom}_{G_1}(V_1, W)=k\,\mathrm{Hom}_{G_1}(V_1, V_1)$は$\mathrm{Hom}_{G_1}(V_1, V_1\otimes V_2)$の$\{0\}$ではない$G_2$不変部分ベクトル空間になる。したがって$\psi^{-1}(\mathrm{Hom}_{G_1}(V_1, W))$は$V_2$の$\{0\}$ではない$G_2$不変部分ベクトル空間になり、$V_2$は既約だから$V_2$に一致する。系1.7より

$$k=\dim(\mathrm{Hom}_{G_1}(V_1, W))=\dim(\mathrm{Hom}_{G_1}(V_1, V_1\otimes V_2))=\dim(V_2)$$

が成り立つ。よって$W=V_1\otimes V_2$となり$(\rho_1\hat{\otimes}\rho_2, V_1\otimes V_2)$は有限次元既約ユニタリ表現である。