微分幾何学 III（大学院） 講義ノート 1991/5/1

3 表現の指標

3.1 定義. 位相群 G の有限次元実（複素）表現 (ρ, V) に対して G 上の実（複素）数値連続関数χ_ρを

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g)) \qquad (g \in G)$$

で定義する。ただしtr は係数が実数と複素数の場合に応じて考える。χ_ρを表現ρの指標と呼ぶ。

3.2 命題. 位相群 G の *2* つの有限次元実表現 (ρ, V) と (σ, W) が同値ならば$\chi_\rho = \chi_\sigma$ が成り立つ。これより可換半環の準同型写像

$$S_{\mathbb{R}}(G) \longrightarrow \mathcal{K}(G); [\rho] \longmapsto \chi_\rho$$

が定まり、この写像は可換環の準同型写像$\chi : R_{\mathbb{R}}(G) \longrightarrow \mathcal{K}(G)$ を誘導する。$x \in G$ に対して

$$v_x : \mathcal{K}(G) \longrightarrow \mathbb{R}; f \longmapsto f(x)$$

とおくと v_xは可換環の準同型写像になり、$\dim = v_e \circ \chi$が成り立つ。ただしdim は例 *2.17* で定めた準同型写像である。係数体が複素数の場合も同じ結果が成り立つ。

証明. $A : V \longrightarrow W$を G 同型写像とすると、$g \in G$ に対して$\sigma(g)A = A\rho(g)$ だから $\sigma(g) = A\rho(g)A^{-1}$となり、

$$\chi_\sigma(g) = \mathrm{tr}(\sigma(g)) = \mathrm{tr}(A\rho(g)A^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho(g)) = \chi_\rho(g).$$

したがって$\chi_\rho = \chi_\sigma$である。

一般に G の有限次元実表現 $(\rho, V), (\sigma, W)$ と各 $g \in G$ について

$$\chi_{\rho\oplus\sigma}(g) = \mathrm{tr}(\rho(g) \oplus \sigma(g)) = \mathrm{tr}(\rho(g)) + \mathrm{tr}(\sigma(g)) = \chi_\rho(g) + \chi_\sigma(g),$$
$$\chi_{\rho\otimes\sigma}(g) = \mathrm{tr}(\rho(g) \otimes \sigma(g)) = \mathrm{tr}(\rho(g))\,\mathrm{tr}(\sigma(g)) = \chi_\rho(g)\chi_\sigma(g).$$

また表現空間が $\{0\}$ の表現の指標は恒等的に 0 になり $\mathbb{R}$ に恒等写像として働く表現の指標は恒等的に 1 になる。したがって写像

$$S_{\mathbb{R}}(G) \longrightarrow \mathcal{K}(G); [\rho] \longmapsto \chi_\rho$$

は可換半環の準同型写像になる。よってこの写像は可換環の準同型写像$\chi : R_{\mathbb{R}}(G) \longrightarrow \mathcal{K}(G)$ を誘導する。各 $[\rho, V] \in S_{\mathbb{R}}(G)$ について

$$v_e \circ \chi([\rho]) = \chi(e) = \mathrm{tr}\, I_V = \dim V.$$

したがって Grothendieck 環の定義より

$$v_e \circ \chi = \dim : R_{\mathbb{R}}(G) \longrightarrow \mathbb{R}$$

が成り立つ。

係数体が複素数の場合も同様に証明できる。

3.3 命題. (ρ, V) を位相群 G の有限次元表現とすると $g, h \in G$ に対して

$$\chi_\rho(ghg^{-1}) = \chi_\rho(h), \quad \chi_{\rho^*}(g) = \chi_\rho(g^{-1})$$

が成り立つ。

証明.

$$\chi_\rho(ghg^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho(ghg^{-1})) = \mathrm{tr}(\rho(g)\rho(h)\rho(g)^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho(h)) = \chi_\rho(h).$$

$\{e_1, \ldots, e_k\}$ を Vの基底とし $\{e_1^*, \ldots, e_k^*\}$ をその双対基底とすると、

$$\begin{aligned}\chi_{\rho^*}(g) = \mathrm{tr}(\rho^*(g)) = \sum_{i=1}^{k}(\rho^*(g)(e_i^*))(e_i) = \sum_{i=1}^{k} e_i^*(\rho(g^{-1})(e_i)) \\ = \mathrm{tr}(\rho(g^{-1})) = \chi_\rho(g^{-1}).\end{aligned}$$

3.4 命題. G をコンパクト位相群としμを G の $Harr$ 測度とする。G の有限次元表現 (ρ, V) に対して

$$\chi_{\rho^*}(g) = \overline{\chi_\rho(g)} \qquad (g \in G)$$
$$\int \chi_\rho d\mu = \dim V_G$$

が成り立つ。(V_Gについては命題 *2.8* を見よ。)

証明. 命題 2.9 よりρが直交(ユニタリ)表現になるような Vの内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が存在する。$\{e_1, \ldots, e_k\}$ を $\langle\ ,\ \rangle$ に関する Vの正規直交基底とする。命題 3.3 を使うと各 $g \in G$ について

$$\begin{aligned}\chi_{\rho^*}(g) = \chi_\rho(g^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho(g)^{-1}) = \sum_{i=1}^{n}\langle\rho(g)^{-1}(e_i), e_i\rangle \\ = \sum_{i=1}^{n}\langle e_i, \rho(g)(e_i)\rangle = \overline{\mathrm{tr}(\rho(g))} = \overline{\chi_\rho(g)}.\end{aligned}$$

$P = \int \rho d\mu$とおくと命題 2.8 より$\mathrm{Im}\, P = V_G$となる。さらに

$$\begin{aligned}\int \chi_\rho(g) d\mu g = \int \mathrm{tr}(\rho(g)) d\mu g = \mathrm{tr}\left(\int \rho(g) d\mu g\right) = \mathrm{tr}\, P \\ = \dim \mathrm{Im}\, P = \dim V_G.\end{aligned}$$

3.5 定理. G をコンパクト位相群としμを G の $Harr$ 測度とする。G の有限次元表現 (ρ, V) と (σ, W) に対して

$$\int \chi_\rho \overline{\chi_\sigma} d\mu = \dim \mathrm{Hom}_G(W, V)$$

が成り立つ。特に (ρ, V) と (σ, W) がともに G の有限次元複素既約表現のときは、

$$\int \chi_\rho \overline{\chi_\sigma} d\mu = \begin{cases} 0 & (\rho \not\simeq \sigma) \\ 1 & (\rho \simeq \sigma) \end{cases}$$

となる。

証明. $g \in G$ に対して、

$$\begin{aligned} \chi_\rho(g)\overline{\chi_\sigma(g)} &= \chi_\rho(g)\chi_{\sigma^*}(g) \quad (\text{命題 } 3.4) \\ &= \chi_{\rho\otimes\sigma^*}(g) \quad (\text{命題 } 3.2) \\ &= \chi_{\mathrm{Hom}(W,V)}(g) \quad (\text{例 } 1.9) \end{aligned}$$

だから命題 3.4 より

$$\int \chi_\rho \overline{\chi_\sigma} d\mu = \dim \mathrm{Hom}_G(W, V).$$

特に (ρ, V) と (σ, W) が有限次元複素既約表現のときは系 1.7 より

$$\dim \mathrm{Hom}_G(W, V) = \begin{cases} 0 & (\rho \not\simeq \sigma) \\ 1 & (\rho \simeq \sigma) \end{cases}$$

となり定理の結論を得る。

3.6 系. G をコンパクト位相群としμを G の *Harr* 測度とする。

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int f_1 \overline{f_2} d\mu \qquad (f_1, f_2 \in \mathcal{K}(G)(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)))$$

によって $\langle\ ,\ \rangle$ を定めると $\mathcal{K}(G)$ $(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G))$ は内積空間になる。$D_{\mathbb{R}}(G)$ で G の有限次現実既約表現の同値類の全体を表し $D_{\mathbb{C}}(G)$ で G の有限次現複素既約表現の同値類の全体を表す。すると $\{\chi([\rho])|[\rho] \in D_{\mathbb{R}}(G)\}$ は $\mathcal{K}(G)$ の直交系になり、$\{\chi([\rho])|[\rho] \in D_{\mathbb{C}}(G)\}$ は $\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ の正規直交系になる。

証明. $\langle\ ,\ \rangle$ が $\mathcal{K}(G)$ $(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G))$ の内積になることは Harr 積分の線形性と性質 (6) よりわかる。$\{\chi([\rho])|[\rho] \in D_{\mathbb{R}}(G)\}$ が $\mathcal{K}(G)$ の直交系になり、$\{\chi([\rho])|[\rho] \in D_{\mathbb{C}}(G)\}$ が $\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ の正規直交系になることは定理 3.5 よりわかる。

3.7 系. G をコンパクト位相群とすると、$\chi : R_{\mathbb{R}}(G) \longrightarrow \mathcal{K}(G)$ は単射になる。特に G の有限次元表現ρ, σに対してρとσが同値になるための必要十分条件は$\rho \simeq \sigma$である。係数体が複素数の場合も同様の結果が成り立つ。

証明. 命題 2.15 より $R_{\mathbb{R}}(G)$ の加群の構造は $D_{\mathbb{R}}(G)$ が生成する自由加群になり、系 3.6 より$\chi(D_{\mathbb{R}}(G))$ はベクトル空間 $\mathcal{K}(G)$ において線形独立になる。したがって、$\chi : R_{\mathbb{R}}(G) \longrightarrow \mathcal{K}(G)$ は単射になる。

係数体が複素数の場合も同様に証明できる。

3.8 定義. 位相群 G に対して $Ch_{\mathbb{R}}(G) = \chi(R_{\mathbb{R}}(G)) \subset \mathcal{K}(G)$ とおき $Ch_{\mathbb{R}}(G)$ を G の実指標環と呼ぶ。G の複素指標環 $Ch_{\mathbb{C}}(G)$ も同様に定義する。系 *3.7* より G がコンパクトのときは G の実（複素）表現環と実（複素）指標環は同型になる。