微分幾何学 III（大学院）　講義ノート　1991/5/1

4 トーラスの表現環

4.1 定義. $U(1)$ の n 個の積を T^n で表し T^n を n 次元トーラスと呼ぶ。T^n はコンパクト Lie 群になる。

4.2 命題. (ρ, V) を可換位相群 G の有限次元複素既約表現とすると、$\dim V = 1$ となる。

証明. $g, x \in G$ に対して $xgx^{-1} = g$ となるので $\rho(x)\rho(g)\rho(x)^{-1} = \rho(g)$。したがって $\rho(g) \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$ となり、補題 1.6 より $\mathrm{Hom}_G(V, V) = \mathbb{C}I_V$ だから、V のすべての部分ベクトル空間は不変部分ベクトル空間になる。よって $\dim V = 1$ である。

4.3 注意. G を可換位相群とすると命題 *4.2* の証明より G の有限次元複素既約表現 (ρ, V) に対して $\rho(g) = \chi_\rho(g) I_V$ $(g \in G)$ となる。したがって、G の *2* つの有限次元複素既約表現 ρ と σ が同値になるための必要十分条件は $\chi_\rho = \chi_\sigma$ である。そこで G から $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ への連続準同型写像の全体を $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ で表すと、

$$D_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times); [\rho] \longmapsto \chi_\rho$$

は全単射になる。$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ は値の積によって群構造を持ち、命題 *3.2* より $\chi_{\rho\otimes\sigma} = \chi_\rho \cdot \chi_\sigma$ だから、$D_{\mathbb{C}}(G)$ は積

$$[\rho] \cdot [\sigma] = [\rho \otimes \sigma] \qquad ([\rho], [\sigma] \in D_{\mathbb{C}}(G))$$

によって群構造を持つ。さらに G がコンパクトのときは命題 *2.9* より $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) = \mathrm{Hom}(G, U(1))$ となる。

4.4 補題. 各 $m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$p_m : U(1) \longrightarrow U(1); u \longmapsto u^m$$

とおくと、$\mathrm{Hom}(U(1), U(1)) = \{p_m | m \in \mathbb{Z}\}$ である。特に $D_{\mathbb{C}}(U(1)) = \{p_m | m \in \mathbb{Z}\}$ とみなせる。

証明. $p_m \in \mathrm{Hom}(U(1), U(1))$ はすぐにわかる。逆に $f \in \mathrm{Hom}(U(1), U(1))$ とする。

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow U(1); t \longmapsto e^{2\pi\sqrt{-1}t}$$

とおくと、これは普遍被覆群になる。したがって $\mathbb{R}$ の加法に関する連続準同型写像 $\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在し $p \circ \tilde{f} = f \circ p$ を満たす。有理数全体が $\mathbb{R}$ 内で稠密になっていることを使うと $\tilde{f}$ に対してある実数 a が存在して $\tilde{f}(t) = at$ $(t \in \mathbb{R})$ となることがわかる。よって $t \in \mathbb{R}$ に対して $p(at) = f(p(t))$ となり、$t = 1$ を代入すると $e^{2\pi\sqrt{-1}a} = 1$。したがって $a \in \mathbb{Z}$ となり、$f(e^{2\pi\sqrt{-1}t}) = e^{2\pi\sqrt{-1}at}$ だから $f = p_a$。以上で

$$\mathrm{Hom}(U(1), U(1)) = \{p_m | m \in \mathbb{Z}\}$$

がわかった。

4.5 定理. 各 $m \in \mathbb{Z}$ について$\phi(p_m) = X^m$となるように加群の準同型写像

$$\phi : R_{\mathbb{C}}(U(1)) \longrightarrow \mathbb{Z}[X, X^{-1}]$$

を定めると、ϕは環の同型写像になる。

証明. $R_{\mathbb{C}}(U(1))$ の加群の構造は $\{p_m | m \in \mathbb{Z}\}$ が生成する自由加群で、$\mathbb{Z}[X, X^{-1}]$ の加群の構造は $\{X^m | m \in \mathbb{Z}\}$ が生成する自由加群である。したがってϕは加群の同型写像である。さらに

$$\phi(p_m \otimes p_n) = \phi(p_{m+n}) = X^{m+n} = X^m \cdot X^n = \phi(p_m) \cdot \phi(p_n)$$

だからϕは環の同型写像になる。

4.6 定理. 各 $1 \leq k \leq n$ について$\pi_k(u_1, \ldots, u_n) = u_k$ とおいて$\pi_k \in \mathrm{Hom}(T^n, U(1))$ を定めると

$$\mathrm{Hom}(T^n, U(1)) = \{\pi_1^{m_1} \cdots \pi_n^{m_n} | m_k \in \mathbb{Z}\}$$

である。これを $D_{\mathbb{C}}(T^n)$ と同一視し、$\phi(\pi_1^{m_1} \cdots \pi_n^{m_n}) = X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n}$ となるように加群の準同型写像

$$\phi : R_{\mathbb{C}}(T^n) \longrightarrow \mathbb{Z}[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_n, X_n^{-1}]$$

を定めると、ϕは環の同型写像になる。

証明. $\pi_1^{m_1} \cdots \pi_n^{m_n} \in \mathrm{Hom}(T^n, U(1))$ はすぐにわかる。逆に $f \in \mathrm{Hom}(T^n, U(1))$ とする。各 $1 \leq k \leq n$ について

$$i_k : U(1) \longrightarrow T^n; u \longmapsto (1, \ldots, 1, \overset{k}{\breve{u}}, 1, \ldots, 1)$$

とおくと、i_kは連続準同型写像になる。さらに $(i_1 \circ \pi_1) \cdots (i_n \circ \pi_n)$ はT^nの恒等写像になるので、

$$f = f((i_1 \circ \pi_1) \cdots (i_n \circ \pi_n)) = (f \circ i_1 \circ \pi_1) \cdots (f \circ i_n \circ \pi_n).$$

ここで $f \circ i_k \in \mathrm{Hom}(U(1), U(1))$ だから補題 4.4 よりある $m_k \in \mathbb{Z}$ が存在して $f \circ i_k = p_{m_k}$となる。したがって

$$f = (p_{m_1} \circ \pi_1) \cdots (p_{m_n} \circ \pi_n) = \pi_1^{m_1} \cdots \pi_n^{m_n}$$

次にϕは $R_{\mathbb{C}}(T^n)$ の自由加群としての生成系を $\mathbb{Z}[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_n, X_n^{-1}]$ の自由加群としての生成系に写しているので、ϕは加群の同型写像になる。さらにテンソル積の性質からϕは環の同型写像になることもわかる。