微分幾何学 III（大学院）　講義ノート　1991/5/8

5 コンパクト位相群上の積分作用素

5.1 補題. G をコンパクト位相群とし、系 *3.6* で定めた内積 $\langle\ ,\ \rangle$ から定まるノルムを $\|\ \|$ で表すと、恒等写像

$$I : (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|_\infty) \longrightarrow (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|)$$

は連続になる。

証明. $f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ に対して

$$\|f\|^2 = \int f\overline{f}d\mu = \int |f\overline{f}|d\mu \leq \int \|f\|_\infty^2 d\mu = \|f\|_\infty^2$$

となるので $\|f\| \leq \|f\|_\infty$が成り立つ。したがって Iは連続写像である。

5.2 定義. G をコンパクト位相群とし L を $\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ の部分集合とする。任意の$\varepsilon > 0$ に対して e のある近傍 Uが存在して

$$f \in L,\ yx^{-1} \in U \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つとき、L を同程度連続という。

5.3 定理 (Ascoli-Arzèra). G をコンパクト位相群とし L を $\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ の部分集合とする。$(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|_\infty)$ において$\overline{L}$がコンパクトになるための必要十分条件は L が $\|\ \|_\infty$ に関して有界でかつ同程度連続になることである。

証明. 参考文献の [横] 第 1 章§11 不変積分を参照のこと

5.4 定義. Eと Fをノルム空間とし、$K : E \longrightarrow F$を線形写像とする。Eの任意の有界部分集合 Bに対して$\overline{K(B)}$が Fのコンパクト部分集合になるとき、Kをコンパクトという。

5.5 注意. ノルム空間においてコンパクト部分集合は有界部分集合になるので、ノルム空間の間のコンパクト線形写像は連続になる。

5.6 命題. G をコンパクト位相群としμを G の *Haar* 測度とする。$k \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G \times G)$ を *1* つとり

$$(Kf)(x) = \int k(x, y)f(y)d\mu y \qquad (f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), x \in G)$$

によって写像

$$K : (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|) \longrightarrow (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|_\infty)$$

を定めると、これはコンパクト線形写像になる。また

$$K : (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|) \longrightarrow (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|)$$

もコンパクト線形写像になる。

証明. $f \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ に対して $Kf \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ となることをまず示しておく。$G \times G$ はコンパクトだから kは一様連続になる。したがって任意の$\varepsilon > 0$ に対して G の単位元 e の近傍 Uが存在し、

$$yx^{-1} \in U \Longrightarrow |k(x, z) - k(y, z)| < \varepsilon$$

を満たす。$yx^{-1}\in U$とすると、

$$\begin{aligned}
|(Kf)(x)-(Kf)(y)| &= \left|\int (k(x,z)-k(y,z))f(z)d\mu z\right| \\
&\leq \int |k(x,z)-k(y,z)||f(z)|d\mu z \\
&\leq \varepsilon \int |f(z)|d\mu z \\
&\leq \varepsilon \|f\| \qquad \text{(Cauchy-Schwarz の不等式)}
\end{aligned}$$

となるので、Kfは連続である。

Kが線形写像になることは Haar 積分の線形性からわかる。

Bを $(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \ \|)$ の有界部分集合とすると、ある $C>0$ が存在して任意の $f\in B$ に対して $\|f\|\leq C$となる。$f\in B$と $x\in G$ に対して

$$\begin{aligned}
|(Kf)(x)| &= \left|\int k(x,y)f(y)d\mu y\right| \\
&\leq \int |k(x,y)f(y)|d\mu y \\
&\leq \|k\|_\infty \int |f(y)|d\mu y \\
&\leq \|k\|_\infty \|f\| \qquad \text{(Cauchy-Schwarz の不等式)} \\
&\leq \|k\|_\infty C.
\end{aligned}$$

したがって $\|Kf\|_\infty \leq \|k\|_\infty C$となり、$K(B)$ は $(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \ \|_\infty)$ の有界部分集合である。

$f\in B$をとり $yx^{-1}\in U$とすると、上で示した不等式より（Uのとり方は fには依存していない）

$$|(Kf)(x)-(Kf)(y)| \leq \varepsilon\|f\| \leq \varepsilon C.$$

よって $K(B)$ は同程度連続になる。Ascoli-Arzèra の定理（定理 5.3）より$\overline{K(B)}$は $(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \ \|_\infty)$ のコンパクト部分集合になる。したがって

$$K:(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \ \|) \longrightarrow (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \ \|_\infty)$$

はコンパクト線形写像になる。補題 5.1 より $(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \ \|)$ においても$\overline{K(B)}$はコンパクト部分集合になり、$\overline{K(B)}$は $K(B)$ を含んでいる。したがって

$$K:(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \ \|) \longrightarrow (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \| \ \|)$$

もコンパクト線形写像になる。

5.7 定義. G をコンパクト位相群とし、

$$\tilde{L}^2(G) = \{f | f: G \text{ 上の複素数値}\mu\text{可測関数}, \int |f|^2 d\mu < \infty\}$$

$$N(G) = \{f \in \tilde{L}^2(G) | \int |f| d\mu = 0\}$$

とおく。さらに

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int f_1 \overline{f_2} d\mu \qquad (f_1, f_2 \in \tilde{L}^2(G))$$

とおくと $\langle\ ,\ \rangle$ は$\tilde{L}^2(G)$ 上の半正定値 *Hermite* 内積になり、商ベクトル空間 $L^2(G) = \tilde{L}^2(G)/N(G)$ 上の正定値 *Hermite* 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を誘導する。

5.8 定理. コンパクト位相群 G に対して、$(L^2(G), \langle\ ,\ \rangle)$ は複素 *Hilbert* 空間になる。(以後、$\langle\ ,\ \rangle$ は省略し $L^2(G)$ で複素 *Hilbert* 空間を表す。)

証明. 参考文献の [**F**] 第 2 章 2.4 Lebesgue integrations を参照のこと

5.9 定理. コンパクト位相群 G に対して、$\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ は $L^2(G)$ 内で稠密になる。

証明. 参考文献の [**F**] 第 2 章 2.3 Measurable functions を参照のこと

5.10 命題. コンパクト位相群 G に対して、命題 *5.6* で定めた積分作用素

$$K : (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|) \longrightarrow (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|)$$

はコンパクト線形写像

$$K : L^2(G) \longrightarrow L^2(G)$$

に一意的に拡張され、$K(L^2(G)) \subset \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ が成り立つ。

証明. 命題 5.6 より

$$K : (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|) \longrightarrow (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|_\infty)$$

は連続線形写像である。定理 5.9 より $(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|)$ は $L^2(G)$ 内で稠密で、命題 2.1 より $(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|_\infty)$ は Banach 空間になっている。したがって上の連続線形写像 Kは次の連続線形写像

$$K : L^2(G) \longrightarrow (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|_\infty)$$

に一意的に拡張される。さらにこれを連続包含写像

$$(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|_\infty) \longrightarrow (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|) \longrightarrow L^2(G)$$

と合成すると求めるものが得られる。$(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|)$ で定義された積分作用素は命題 5.6 よりコンパクトだから

$$K : L^2(G) \longrightarrow L^2(G)$$

もコンパクト線形写像になる。また Kの拡張の仕方より $K(L^2(G)) \subset \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ が成り立つこともわかる。

5.11 定理 (Hilbert-Schmidt). Eを複素 *Hilbert* 空間とし $T : E \longrightarrow E$をコンパクト自己随伴線形写像とする。Tの固有値λの固有空間を $E(\lambda)$ で表す。すると以下が成り立つ。

(1) Tの互いに異なる固有値λ, μに対して $E(\mu)$ と $E(\lambda)$ は互いに直交する閉部分ベクトル空間になる。
(2) Tの 0 でない固有値λに対して $E(\lambda)$ は有限次元になる。
(3) Tの固有値の全体は有界可算集合で 0 でないものは孤立している。さらに Tの重複度を込めた固有値の全体を $\{\lambda_n\}$ で表すと$\sum_n |\lambda_n|^2 < \infty$ となる。
(4) 直和$\oplus\{E(\lambda)|\lambda$は Tの固有値 $\}$ は E内で稠密になる。

証明. 参考文献の [**D**] 第 XI 章 5. Compact operators in Hilbert spaces を参照のこと

5.12 定理. G をコンパクト位相群とし $k \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G \times G)$ が

$$k(x,y) = \overline{k(y,x)} \qquad (x, y \in G)$$

を満たすとする。このとき kから命題 *5.6* と命題 *5.10* で定めた積分作用素

$$K : L^2(G) \longrightarrow L^2(G)$$

はコンパクト自己随伴線形写像になり定理 *5.11* の結論 (1) から (4) が成り立つ。さらに以下が成り立つ。

(5) Kの 0 以外の固有値の固有関数は連続になる。
(6) $f \in K(L^2(G))$ に対して Kの各固有値λに対応する固有関数 f_λをとり $f = \sum_\lambda f_\lambda$と表したとき、右辺は G 上の絶対一様収束になる。

証明. $f_1, f_2 \in \mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle Kf_1, f_2\rangle &= \int\int k(x,y)f_1(y)d\mu y\overline{f_2(x)}d\mu x \\
&= \int f_1(y)\int k(x,y)\overline{f_2(x)}d\mu x d\mu y \\
&= \int f_1(y)\overline{\int k(y,x)f_2(x)d\mu x}d\mu y \\
&= \int f_1(y)\overline{(Kf_2)(y)}d\mu y \\
&= \langle f_1, Kf_2\rangle.
\end{aligned}$$

$\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G)$ は $L^2(G)$ 内で稠密だから

$$\langle Kf_1, f_2\rangle = \langle f_1, Kf_2\rangle \qquad (f_1, f_2 \in L^2(G))$$

が成り立ち Kはコンパクト自己随伴線形写像になる。したがって定理 5.11 を適用することができ結論の (1) から (4) が成り立つ。

(5) λを Kの 0 以外の固有値とし $f \in L^2(G)$ をλに対応する固有関数とすると、$Kf = \lambda f$で命題 5.10 より Kfは連続になるので、fも連続になる。
(6) $f \in K(L^2(G)) \subset L^2(G)$ に対して定理 5.11 の (4) より Kの各固有値λに対応する固有関数 f_λが一意的に存在し、$f = \sum_\lambda f_\lambda$と表すことができる。ここで右辺の

級数は $L^2(G)$ の級数である。他方 $f=Kg$となる $g\in L^2(G)$ をとり、Kの固有関数 g_λによって $g=\sum_\lambda g_\lambda$と表すと命題 5.10 の証明中にみたように

$$K : L^2(G) \longrightarrow (\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|_\infty)$$

は連続だから

$$f = Kg = \sum_\lambda Kg_\lambda = \sum_\lambda \lambda g_\lambda$$

は $(\mathcal{K}^{\mathbb{C}}(G), \|\ \|_\infty)$ の級数として収束している。よって $f_\lambda=\lambda g_\lambda$で $f=\sum_\lambda f_\lambda$は一様収束になる。さらに各 $x\in G$ について

$$\begin{aligned}
\left(\sum_\lambda |f_\lambda(x)|\right)^2 &= \left(\sum_\lambda \|g_\lambda\||\lambda|\frac{f_\lambda(x)}{\|f_\lambda\|}\right)^2 \\
&\leq \sum_\lambda \|g_\lambda\|^2 \sum_\lambda |\lambda|^2 \frac{|f_\lambda(x)|^2}{\|f_\lambda\|^2} \qquad \text{(Cauchy-Schwarz の不等式)} \\
&= \|g\|^2 \sum_\lambda \frac{|(Kf_\lambda)(x)|^2}{\|f_\lambda\|^2} \qquad \text{(Perseval の等式)} \\
&= \|g\|^2 \sum_\lambda \left| \int k(x,y)\frac{f_\lambda(y)}{\|f_\lambda\|} d\mu y \right|^2 .
\end{aligned}$$

ここで $\{\overline{f}_\lambda/\|f_\lambda\|\}_\lambda$は $L^2(G)$ の正規直交系だから、Bessel の不等式（[**D**] 第 VI 章 5. Orthonormal systems を参照のこと、上の Perseval の等式も同様）より

$$\sum_\lambda \left| \int k(x,y)\frac{f_\lambda(y)}{\|f_\lambda\|} d\mu y \right|^2 = \sum_\lambda \left| \langle k(x,\cdot), \frac{\overline{f_\lambda}}{\|f_\lambda\|}\rangle \right|^2 \leq \|k(x,\cdot)\|^2 = \|k\|_\infty^2 .$$

したがって

$$\left(\sum_\lambda |f_\lambda(x)|\right)^2 \leq \|g\|^2\|k\|_\infty^2$$

となり問題の級数が絶対収束することがわかる。