8 極大トーラス

8.1 補題. *Lie* 群上の左不変 *Riemann* 計量はその *Lie* 環上の内積を定める。逆にその *Lie* 環上の内積は *Lie* 群上の左不変 *Riemann* 計量を定める。さらにその *Riemann* 計量が両側不変になるための必要十分条件はその *Lie* 群の随伴表現が直交表現になることである。特にコンパクト *Lie* 群には両側不変 *Riemann* 計量が存在する。

証明. G を Lie 群とし $\mathfrak{g}$ をその Lie 環とする。

　G 上に左不変 Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ があれば、$X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して $\langle X, Y\rangle$ が定まる。これは G 上の左不変な関数になるので、定数値関数になる。これによって $\mathfrak{g}$ 上の内積が定まる。

　逆に $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ があれば、

$$\alpha : \mathfrak{g} \longrightarrow T_e(G); X \longmapsto X_e$$

が等長的になるように $T_e(G)$ に内積を入れることができる。さらに各 $g \in G$ に対して $(dL_g)_e : T_e(G) \longrightarrow T_g(G)$ が等長的になるように $T_g(G)$ に内積を入れると、これは G 上の左不変 Riemann 計量になる。

　次に Lie 群 G 上の左不変 Riemann 計量が両側不変になるための必要十分条件を考えてみよう。各 $g, x \in G$ と $X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}(dR_g)_x((dL_x)_e X) &= \left.\frac{d}{dt}\exp(tX)g\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{d}{dt} g\exp(t\,\mathrm{Ad}(g)^{-1}X)\right|_{t=0} \\ &= (dL_g)_e(\mathrm{Ad}(g)^{-1}X)_e.\end{aligned}$$

よって

$$(dR_g)_x = (dL_g)_e\alpha\,\mathrm{Ad}(g)^{-1}\alpha^{-1}(dL_x)_e^{-1}$$

となり G 上の左不変 Riemann 計量が両側不変になるための必要十分条件は G の随伴表現$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ が直交表現になることである。

　特に G をコンパクト Lie 群とすると、命題 2.9 より随伴表現$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ が直交表現になるような $\mathfrak{g}$ の内積が存在する。したがって G 上に両側不変 Riemann 計量が存在する。

8.2 補題. G を両側不変 *Riemann* 計量を持つ *Lie* 群とし $\mathfrak{g}$ をその *Lie* 環とする。このとき

$$\langle [X, Y], Z\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle = 0 \qquad (X, Y, Z \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ。共変微分を ∇ で表すと

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y] \qquad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ。また G の *1* 径数部分群の全体と単位元からでる測地線の全体は一致する。

証明. G の両側不変 Riemann 計量を $\langle\ ,\ \rangle$ で表す。補題 8.1 より G の随伴表現は直交表現だから $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\langle \mathrm{Ad}(\exp tX)Y, \mathrm{Ad}(\exp tX)Z\rangle\right|_{t=0}$$

$$= \langle [X, Y], Z\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle.$$

$\langle X, Y\rangle$ は G 上の定数関数になるので、

$$0 = X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

同様にして

$$0 = Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle$$
$$0 = Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle.$$

ここで $\nabla_Y X = [Y, X] + \nabla_X Y$を使うと

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y\rangle + \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X\rangle = 0.$$

したがって、

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}(\langle [X, Y], Z\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle).$$

すでに導いた等式を使うと

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\langle [X, Y], Z\rangle$$

となり

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y] \qquad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

が成り立つ。

$X \in \mathfrak{g}$ をとり $p(t) = \exp(tX)$ とおく。$p(t)$ は Xの e を通る積分曲線だから$\dot{p}(t) = \frac{dp}{dt}$ とおくと

$$\nabla_{\dot{p}(t)}\dot{p}(t) = \frac{1}{2}[X, X]_{p(t)} = 0$$

となり、$p(t)$ は測地線になる。

逆に$\gamma(0) = e$ と $\frac{d\gamma}{dt}(0) = X_e$を満たす測地線$\gamma(t)$ をとると、測地線の初期値に関する一意性から$\gamma(t) = p(t)$ となり$\gamma(t)$ は 1 径数部分群になる。

8.3 定理 **(Hopf-Rinow).** *Mを完備で連結な Riemann 多様体とする。このとき M の任意の 2 点は測地線で結ばれる。*

証明. 参考文献の [**C-E**] 第 1 章 3. The Hopf-Rinow theorem を参照のこと

8.4 定理**.** *コンパクト連結 Lie 群の任意の元に対してその元を通る 1 径数部分群が存在する。*

証明. G をコンパクト連結 Lie 群とする。補題 8.1 より G 上には両側不変 Riemann 計量が存在する。G はコンパクトだから完備になり、Hopf-Rinow の定理 (定理 8.3) より G の任意の元と単位元を結ぶ測地線が存在する。補題 8.2 よりこの測地線は G の 1 径数部分群になる。

8.5 補題. G を n 次元コンパクト連結可換 *Lie* 群とすると G は n 次元トーラスと同型になる。

証明. G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると G の指数写像$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ は

$$\exp(X+Y) = \exp X \exp Y \qquad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

を満たすので、Lie 群の準同型写像になる。exp は $0 \in \mathfrak{g}$ の近傍で微分同型写像になるので、Ker(exp) は $\mathfrak{g}$ の離散部分群になる。したがって、ある線形独立になる $\mathfrak{g}$ の元 $X_1, \ldots, X_k$が存在し

$$\mathrm{Ker}(\exp) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{Z} X_i$$

となる。$G \cong \mathfrak{g}/\mathrm{Ker}(\exp)$ で G はコンパクトだから $k = n$。さらに

$$\varphi : \mathfrak{g}/\mathrm{Ker}(\exp) \longrightarrow T^n; \left[\sum_{i=1}^{n} x_i X_i\right] \longmapsto (e^{2\pi\sqrt{-1}x_1}, \ldots, e^{2\pi\sqrt{-1}x_n})$$

は Lie 群の同型写像になる。

8.6 補題. n 次元トーラス T^nにはある元 gが存在し $\{g^i | i \in \mathbb{N}\}$ は T^n内で稠密になる。また、このような性質を持つ元の全体は T^n内で稠密になる。

証明. T^nの可算開基 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$を 1 つとる。$\xi = (e^{2\pi\sqrt{-1}\xi_1}, \ldots, e^{2\pi\sqrt{-1}\xi_n}) \in T^n$と$\varepsilon > 0$ に対して

$$C(\xi; \varepsilon) = \{(e^{2\pi\sqrt{-1}x_1}, \ldots, e^{2\pi\sqrt{-1}x_n}) \in T^n | \, |x_i - \xi_i| \leq \varepsilon\}$$

とおくと、$C(\xi; \varepsilon)$ はξのコンパクト近傍になる。$C(\xi; \varepsilon)$ を任意に 1 つとり、$C_0 = C(\xi; \varepsilon)$ とおく。以下で $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$を帰納的に定める。$C_i = C(\xi_i; \varepsilon_i)$ とする。$2\varepsilon_i N > 1$ となる自然数 Nをとると、写像

$$C_i \longrightarrow T^n; x \longmapsto x^N$$

は連続な全射になる。そこで $C(\xi_{i+1}; \varepsilon_{i+1}) \subset C_i$を

$$x \in C(\xi_{i+1}; \varepsilon_{i+1}) \Longrightarrow x^N \in U_{i+1}$$

を満たすようにとることができる。$C_{i+1} = C(\xi_{i+1}; \varepsilon_{i+1})$ とおく。各 C_iはコンパクトで $C_{i+1} \subset C_i$だから$\cap_i C_i \neq \emptyset$。そこで $g \in \cap_i C_i$をとると各自然数 i について $g \in C_i$ だからある自然数 Nが存在して $g^N \in U_i$となる。したがって $\{g^i | i \in \mathbb{N}\}$ は T^n内で稠密になる。さらに最初の C_0のとりかたは任意で $g \in C_0$だから、このような gの全体は T^n内で稠密になる。

8.7 補題. G を可換位相群とする。G が位相部分群として n 次元トーラス T^nを含み $G/T^n \cong \mathbb{Z}_m$となると仮定すると、G にはある元 gが存在し $\{g^i | i \in \mathbb{N}\}$ は G 内で稠密になる。

証明. 補題 8.6 より $t \in T^n$を $\{t^i | i \in \mathbb{N}\}$ が T^n内で稠密になるようにとることができる。次に $G/T^n \cong \mathbb{Z}_m$だから $u \in G$ を

$$\{u^k T^n | 0 \leq k \leq m-1\} = G/T^n$$

が成り立つようにとることができる。このとき $u^m \in T^n$となり $t(u^m)^{-1} \in T^n$が成り立つ。そこで $s^m = t(u^m)^{-1}$となる $s \in T^n$をとる。$g = su$ とおくと $g^m = s^m u^m = t$ となるので $\{g^{mi} | i \in \mathbb{N}\}$ は T^n内で稠密になる。また各 $0 \leq k \leq m-1$ について $g^{mi+k} = t^i g^k = t^i s^k u^k$だから $\{g^{mi+k} | i \in \mathbb{N}\}$ は $u^k T^n$内で稠密になる。したがって $\{g^i | i \in \mathbb{N}\}$ は G 内で稠密になる。

8.8 定理. *G をコンパクト連結 Lie 群とし Tをトーラスと同型な G の閉 Lie 部分群とする。*

$$Z(T) = \{g \in G | gtg^{-1} = t \ (t \in T)\}$$

とおくと、任意の $z \in Z(T)$ に対して $z \in T'$と $T \subset T'$を満たすトーラスと同型な G の閉 Lie 部分群 T'が存在する。特に

$$Z(T) = \cup \{T' | T' : \text{トーラスと同型な } G \text{ の閉 } Lie \text{ 部分群}, T \subset T'\}$$

となり、$Z(T)$ は連結になる。

証明. まず $Z(T)$ は G の閉 Lie 部分群になることに注意しておく。$z \in Z(T)$ を任意に 1 つとる。Tと zの生成する G の部分群の閉包を A で表すと、A はコンパクト可換 Lie 部分群になる。さらに A の単位連結成分を A_0とすると、$A = \cup_i z^i A_0$となる。A_0 はコンパクト連結可換 Lie 群になるので、補題 8.5 よりトーラスに同型になる。A はコンパクトだからある自然数 i が存在し $z^i \in A_0$となる。そこでそのような自然数の内で最小のものを m とおくと $A/A_0 \cong \mathbb{Z}_m$となる。したがって補題 8.7 よりある元 g が存在し $\{g^i | i \in \mathbb{N}\}$ は G 内で稠密になる。定理 8.4 より gを通る 1 径数部分群γをとることができる。γの像の閉包を T'とすると、T'はコンパクト連結可換 Lie 部分群になるので補題 8.5 よりトーラスと同型になる。さらに $A \subset T'$を満たすので、$z \in T'$と $T \subset T'$が成り立つ。したがって $T' \subset Z(T)$ となり

$$Z(T) = \cup \{T' | T' : \text{トーラスと同型な } G \text{ の閉 Lie 部分群}, T \subset T'\}$$

が成り立つ。これより $Z(T)$ が連結になることもわかる。

8.9 定義. G をコンパクト連結 *Lie* 群とする。トーラスと同型な G の閉 *Lie* 部分群 Tが包含関係に関して極大になっているとき Tを G の極大トーラスと呼ぶ。

8.10 定理. *G をコンパクト連結 Lie 群とし G の極大トーラス Tを 1 つとる。*

$$N(T) = \{g \in G | gTg^{-1} = T\}$$
$$Z(T) = \{g \in G | gtg^{-1} = t \ (t \in T)\}$$

とおくと、$Z(T) = T$となりこれは $N(T)$ の単位連結成分になる。特に $N(T)/Z(T)$ は有限群になる。

証明. 定理 8.8 より

$$Z(T) = \cup \{T' | T' : \text{トーラスと同型な } G \text{ の閉 Lie 部分群}, T \subset T'\}$$

となり、Tは極大トーラスだから $Z(T) = T$となる。

$N(T)$ は G の閉 Lie 部分群になる。$N(T)$ の単位連結成分を $N_0(T)$ で表すと $N_0(T)$ も G の閉 Lie 部分群になる。Tの Lie 環を $\mathfrak{t}$ で表すと$\mathrm{Aut}(T)$ は自然に $GL(\mathfrak{t})$ の離散部分群とみなすことができ、

$$N(T) \longrightarrow \mathrm{Aut}(T); n \longmapsto (t \longmapsto ntn^{-1})$$

は連続準同型写像になる。したがって $N_0(T)$ は単位元に写る。つまり $N_0(T) \subset Z(T)$ が成り立つ。$T \subset N_0(T) \subset Z(T)$ だから $T = N_0(T) = Z(T)$ となる。$N(T)$ はコンパクトだから連結成分の個数は有限個になり、$N(T)/Z(T)$ は有限群になる。

8.11 定義. G をコンパクト連結 *Lie* 群とし G の極大トーラス Tを *1* つとる。このとき有限群 $N(T)/Z(T)$ を G の *Weyl* 群と呼び、$W(G)$ で表す。

8.12 注意. 定義 *8.11* において *Weyl* 群の定義は極大トーラスのとりかたに依存しているが、あとで極大トーラスはすべて共役になることがわかるので、実は *Weyl* 群は極大トーラスのとりかたによらない。

8.13 例. $U(n)$ の部分群 Tを

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & z_n \end{bmatrix} \;\middle|\; z_j \in U(1)\ (1 \leq j \leq n) \right\}$$

で定めると、Tは $U(n)$ の極大トーラスになる。