微分幾何学 III（大学院）　講義ノート　1991/6/5

9 極大トーラスの共役性

9.1 定義. $M,\,M'$をともに n 次元多様体とし、$f: M \longrightarrow M'$を C^∞級写像とする。$\mathrm{rank}(df_x)=n$ となる Mの点 x を fの正則点と呼び、$\mathrm{rank}(df_x)<n$ となる Mの点 x を fの臨界点と呼ぶ。fの臨界点の fによる像を fの臨界値と呼び、fの臨界値でない M'の点を fの正則値と呼ぶ。

9.2 補題. $M,\,M'$をともに向きのついた n 次元コンパクト連結多様体とし、$f: M \longrightarrow M'$を C^∞級写像とする。fの正則点 $x \in M$に対して

$$\mathrm{sign}(df_x)=\begin{cases} 1 & df_x\text{が向きを保つ線形同型写像} \\ -1 & df_x\text{が向きを逆にする線形同型写像} \end{cases}$$

として$\mathrm{sign}(df_x)$ を定める。このとき、fの正則値 $y \in M'$に対して $f^{-1}(y)$ は Mの有限部分集合になり、

$$\sum_{x\in f^{-1}(y)} \mathrm{sign}(df_x)$$

は yに依存しない定数になる。

証明. 参考文献の [松] 第 V 章§6 写像度または [**M**]§5 Oriented manifolds を参照のこと

9.3 定義. $M,\,M'$をともに向きのついた n 次元コンパクト連結多様体とし、$f: M \longrightarrow M'$を C^∞級写像とする。このとき、fの正則値 $y \in M'$をとり

$$\deg(f)=\sum_{x\in f^{-1}(y)} \mathrm{sign}(df_x)$$

とおき、$\deg(f)$ を fの写像度と呼ぶ。

9.4 定理. G をコンパクト連結 *Lie* 群とし G の極大トーラス Tを *1* つとる。このとき、$G,\,T,\,G/T$に向きを定めることができ、写像

$$q:(G/T)\times T \longrightarrow G;(gT,t)\longmapsto gtg^{-1}$$

の写像度は G の *Weyl* 群 $W(G)$ の位数に等しい。特に qは全射になる。

証明. $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{t}$ をそれぞれ G と Tの Lie 環とする。G はコンパクトだから補題 8.1 より G の随伴表現$\mathrm{Ad}: G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ が直交表現になるような $\mathfrak{g}$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が存在する。G の随伴表現を Tに制限すると、$\mathfrak{t}$ は Tの作用に関して不変な部分空間になる。$\mathfrak{t}$ の直交補空間を $\mathfrak{m}$ で表すと $\mathfrak{m}$ もまた Tの作用に関して不変な部分空間になる。さらに線形同型写像

$$\alpha:\mathfrak{g}\longrightarrow T_e(G);X\longmapsto X_e$$

によって $\mathfrak{g}$ と $T_e(G)$ を同一視すると、写像

$$\pi: G \longrightarrow G/T; g\longmapsto gT$$

の単位元 e における微分写像 $d\pi_e : \mathfrak{g} \longrightarrow T_{\pi(e)}(G/T)$ の核は $\mathfrak{t}$ に一致し、

$$d\pi_e|_{\mathfrak{m}} \ : \mathfrak{m} \longrightarrow T_{\pi(e)}(G/T)$$

は線形同型写像になる。$X_1, \dots, X_{n-k}$が $\mathfrak{m}$ の基底になり $X_{n-k+1}, \dots, X_n$が $\mathfrak{t}$ の基底になるように $\mathfrak{g}$ の基底 $X_1, \dots, X_n$をとる。$X_1, \dots, X_n$は G 上で定義されたベクトル場で、各点の接ベクトル空間で基底になるので、G に向きを与える。同様に $X_{n-k+1}, \dots, X_n$の Tへの制限は Tに向きを与える。また $X_1, \dots, X_{n-k}$は $d\pi_e|_{\mathfrak{m}}$ を通して $T_{\pi(e)}(G/T)$ に向きを与え、Tは連結だから Tの $T_{\pi(e)}(G/T)$ への作用

$$t(v) = (dt)_{\pi(e)}(v) \qquad (t \in T, v \in T_{\pi(e)}(G/T))$$

は $T_{\pi(e)}(G/T)$ の向きを変えない。したがって、この向きを G/T全体に拡張することができる。よって G/Tにも向きがつく。

次に $g, g_1 \in G,\ t_1 \in T$が $g_1 = gt_1$を満たすと $g_1 t g_1^{-1} = g t_1 t t_1^{-1} g^{-1} = gtg^{-1}$だから写像

$$q : (G/T) \times T \longrightarrow G; (gT, t) \longmapsto gtg^{-1}$$

を定義することができる。また写像

$$G \times T \longrightarrow G; (g, t) \longmapsto gtg^{-1}$$

は C^∞級写像だから qも C^∞級写像になる。

写像 qの写像度を求めるためにまず qの微分写像を求めておこう。$g \in G$ に対して

$$\tau(g) : G/T \longrightarrow G/T; xT \longmapsto gxT$$

とおくと、$\tau(g)$ は G/Tの向きを保つ微分同型写像になる。$g \in G, t \in T$と $X \in \mathfrak{m}, Y \in \mathfrak{t}$ に対して

$$\begin{aligned}
& dq_{(gT,t)}((d\tau(g))_{\pi(e)}X, (dL_t)_e Y) \\
&= \frac{d}{ds} q((g \exp sX)T, t \exp sY)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds} g \exp sX t \exp sY (g \exp sX)^{-1}\Big|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds} gtg^{-1} g t^{-1} \exp sX t \exp sY \exp(-sX) g^{-1}\Big|_{s=0} \\
&= (dL gtg^{-1})_e \operatorname{Ad}(g)\ \frac{d}{ds} \exp s \operatorname{Ad}(t^{-1})X \exp sY \exp(-sX)\Big|_{s=0} \\
&= (dL_{q(gT,t)})_e \operatorname{Ad}(g)((\operatorname{Ad}(t^{-1}) - I_{\mathfrak{m}}\ )X + Y).
\end{aligned}$$

したがって、

$$dq_{(gT,t)}((d\tau(g))_{\pi(e)} \times (dL_t)_e) = (dL_{q(gT,t)})_e \operatorname{Ad}(g)((\operatorname{Ad}(t^{-1})|_{\mathfrak{m}} \ - I_{\mathfrak{m}}\ ) + I_{\mathfrak{t}}\ ).$$

これより、(gT, t) が qの正則点になるための必要十分条件は$\operatorname{Ad}(t^{-1})|_{\mathfrak{m}} \ - I_{\mathfrak{m}}$ が $\mathfrak{m}$ の線形同型写像になることである。

補題 8.6 より $\{t_1^i | i \in \mathbb{N}\}$ が T内で稠密になるような $t_1 \in T$が存在する。この t_1を使って qの写像度を求めよう。$t_0 \in T$を $t_0^2 = t_1^{-1}$となるようにとると、$\{t_0^i | i \in \mathbb{N}\}$ も T内で稠密になる。$(gT, t) \in q^{-1}(t_1)$ とすると、$gtg^{-1} = t_1$となるので $g^{-1}t_1g = t \in T$。したがって、各 $i \in \mathbb{N}$ について $g^{-1}t_1^ig = t^i \in T$となり $g^{-1}Tg \subset T$。$g^{-1}Tg$も G の極大トーラスになるので $g^{-1}Tg = T$。これより $g \in N(T)$ となり、

$$q^{-1}(t_1) = \{(gT, g^{-1}t_1g) | g \in N(T)\}.$$

よって $q^{-1}(t_1)$ の元の個数は G の Weyl 群の位数に等しい。そこで各 $(gT, g^{-1}t_1g) \in q^{-1}(t_1)$ においてsign$(dq) = 1$ となることを示そう。$X \in \mathfrak{m}$ が $(\mathrm{Ad}(g^{-1}t_1^{-1}g)|_{\mathfrak{m}} - I_{\mathfrak{m}})(X) = 0$ を満たすとする。t_1の性質より任意の $t \in T$に対して$\mathrm{Ad}(t)X = X$となり、XはTの中心化部分群の Lie 環の元になる。したがって定理 8.10 より $X \in \mathfrak{t}$ となり、$\mathfrak{t} \cap \mathfrak{m} = \{0\}$ だから $X = 0$ となる。よって$\mathrm{Ad}(g^{-1}t_1^{-1}g)|_{\mathfrak{m}} - I_{\mathfrak{m}}$ は$\mathfrak{m}$の線形同型写像になる。$\mathrm{Ad}(g^{-1}t_0g)|_{\mathfrak{m}}$ は $\mathfrak{m}$ の等長変換だから$\mathrm{Ad}(g^{-1}t_0^2g)|_{\mathfrak{m}} = \mathrm{Ad}(g^{-1}t_1^{-1}g)|_{\mathfrak{m}}$ は行列式 1 の等長変換になる。したがって$\mathrm{Ad}(g^{-1}t_1^{-1}g)|_{\mathfrak{m}}$ の表現行列が

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ & & & \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix}$$

となるように $\mathfrak{m}$ の基底をとることができる。

$$\det \begin{bmatrix} \cos\theta_j - 1 & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j - 1 \end{bmatrix} = 2(1 - \cos\theta_j) > 0$$

となり、$\mathrm{Ad}(g^{-1}t_1^{-1}g)|_{\mathfrak{m}} - I_{\mathfrak{m}}$ の行列式は正になる。したがってsign$(dq)_{(gT, g^{-1}t_1g)} = 1$ となり、

$$\deg(q) = |W(G)|$$

が成り立つ。特に qは全射になる。

9.5 定理. G をコンパクト連結 *Lie* 群とし、Tと T'を G の極大トーラスとする。このとき、Tと T'は共役になる。

証明. 補題 8.6 より $\{{t'}^i | i \in \mathbb{N}\}$ が T'内で稠密になるような $t' \in T$をとることができる。定理 9.4 より $g \in G$ と $t \in T$で

$$t' = q(gT, t) = gtg^{-1}$$

を満たすものが存在する。よって、$g^{-1}t'g = t \in T$となり $g^{-1}T'g \subset T$。$g^{-1}T'g$も G の極大トーラスになるので $g^{-1}T'g = T$。したがって Tと T'は共役になる。

9.6 定義. 定理 *9.5* よりコンパクト連結 *Lie* 群 G の極大トーラスの次元は一定である。G の極大トーラスの次元を G の階数と呼び、rank(G) で表す。

9.7 系. G をコンパクト連結 *Lie* 群とし Tを G の極大トーラスとする。G と Tの *Lie* 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{t}$ で表す。このとき

$$G = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}, \quad \mathfrak{g} = \bigcup_{g \in G} \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t}$$

が成り立つ。

証明. 定理 9.5 の写像 qが全射になることから、

$$G = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}$$

が成り立つことはすぐにわかる。任意に $X \in \mathfrak{g}$ を 1 つとる。$\{\exp(tX) | t \in \mathbb{R}\}$ の閉包を Sとおくと、Sはトーラスと同型な G の閉 Lie 部分群になる。Sを含む G の極大トーラス T'をとると、定理 9.5 よりある $g \in G$ が存在し $T' = gTg^{-1}$となる。したがって $X \in \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t}$ となって

$$\mathfrak{g} = \bigcup_{g \in G} \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t}$$

が成り立つ。

9.8 系. G をコンパクト連結 *Lie* 群とし、Tと T'を G の極大トーラスとする。このとき、Tから定まる G の *Weyl* 群と T'から定まる G の *Weyl* 群は同型になる。

証明. 定理 9.5 より $g \in G$ が存在し $T' = gTg^{-1}$となる。したがって $N(T') = gN(T)g^{-1}$となり $N(T)/T \cong (gN(T)g^{-1})/(gTg^{-1}) = N(T')/T'$が成り立つ。よって Tから定まる G の Weyl 群と T'から定まる G の Weyl 群は同型になる。

9.9 系. G をコンパクト連結 *Lie* 群とし Zを G の中心とする。このとき

$$Z = \cap \{T | T : G \text{ の極大トーラス } \}$$

が成り立つ。

証明. $z \in Z$とすると G の任意の極大トーラス Tに対して定理 8.8 より zと Tをともに含むトーラス T'が存在するので、$T = T'$となり $z \in T$がわかる。

逆に $z \in \cap\{T | T : G \text{ の極大トーラス } \}$ とする。任意の $g \in G$ に対して系 9.7 より gを含む G の極大トーラス Tが存在する。したがって zと gは可換になり、zは G の中心に含まれる。

9.10 定義. G をコンパクト連結 *Lie* 群とし Tを G の極大トーラスとする。定理 *8.10* とその証明中に示したことより G の *Weyl* 群 $W(G)$ は Tの自己同型群$\mathrm{Aut}(T)$ の部分群とみなせる。$W(G)$ の Tへの作用は $W(G)$ の $Ch_{\mathbb{C}}(T)$ への作用を誘導する。$W(G)$ の作用で不変な $Ch_{\mathbb{C}}(T)$ の元の全体を $Ch_{\mathbb{C}}(T)^{W(G)}$で表す。また

$$R_{\mathbb{C}}(T)^{W(G)} = \chi^{-1}(Ch_{\mathbb{C}}(T)^{W(G)})$$

と表す。

9.11 系. G をコンパクト連結 *Lie* 群とし Tを G の極大トーラスとする。包含写像 $\iota : T \longrightarrow G$が誘導する表現環の間の準同型写像 (定義 *2.18*) $\iota^* R_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow R_{\mathbb{C}}(T)^{W(G)}$ は単射になる。

証明. 図式

$$\begin{array}{ccc} R_{\mathbb{C}}(G) & \xrightarrow{\iota^*} & R_{\mathbb{C}}(T) \\ \chi\big\downarrow & & \big\downarrow\chi \\ Ch_{\mathbb{C}}(G) & \xrightarrow{\iota^*} & Ch_{\mathbb{C}}(T) \end{array}$$

は可換になり、系 3.7 よりχは同型写像になる。したがって$\iota^* : Ch_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow Ch_{\mathbb{C}}(T)$ が単射になることを示せばよい。$f \in Ch_{\mathbb{C}}(G)$ が$\iota^* f = 0$ を満たすとする。任意の $x \in G$ に対して定理 9.7 よりある $g \in G$ が存在し $gxg^{-1} \in T$となる。よって $f(x) = f(gxg^{-1}) = 0$ となり $f = 0$。これより$\iota^* : Ch_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow Ch_{\mathbb{C}}(T)$ は単射になる。さらにι^*の像は G 上の類関数の Tへの制限だから、$W(G)$ の作用で不変になり $\iota^*(Ch_{\mathbb{C}}(G)) \subset Ch_{\mathbb{C}}(T)^{W(G)}$が成り立つ。

9.12 補題. 連結で完備な *Riemann* 多様体の基本群の元の代表元として測地線をとることができる。

証明. Mを連結で完備な Riemann 多様体とし、$p : \tilde{M} \longrightarrow M$を普遍被覆写像とする。$p$ は局所微分同型だから p が局所等長写像になるように$\tilde{M}$に Riemann 計量を入れることができる。このとき$\tilde{M}$も連結で完備な Riemann 多様体になる。$x \in M$を固定して基本群$\pi_1(M, x)$ の元 $[c]$ を 1 つとる。ここで $c : [0, 1] \longrightarrow M$は $c(0) = c(1) = x$ を満たす Mの閉曲線である。$\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ をとり c の$\tilde{x}$を通る持ち上げ$\tilde{c}$をとる。定理 8.3 より$\tilde{x}$と$\tilde{c}(1)$ を結ぶ測地線γが存在する。$\tilde{M}$は単連結だから $p \circ \tilde{c} = c$ と $p \circ \gamma$は同じホモトピー類を定める。さらに $p \circ \gamma$は Mの測地線になるので、$[c]$ の代表元として測地線 $p \circ \gamma$をとることができる。

9.13 系. G をコンパクト連結 *Lie* 群とし Tを G の極大トーラスとする。包含写像 $\iota : T \longrightarrow G$ が誘導する基本群の間の準同型写像$\iota_* : \pi_1(T) \longrightarrow \pi_1(G)$ は全射になる。

証明. 補題 8.1 より G に両側不変 Riemann 計量を入れることができる。このとき補題 8.2 より G の 1 径数部分群の全体と単位元からでる測地線の全体は一致する。補題 9.12 と合わせると$\pi_1(G, e)$ の元の代表元として G の 1 径数部分群をとることができる。さらに系 9.7 よりそれは Tの 1 径数部分群と共役になる。G は連結だからこれらは同じホモトピー類を定める。つまり$\pi_1(G, e)$ の元の代表元として Tの 1 径数部分群をとることができる。したがって$\iota_* : \pi_1(T) \longrightarrow \pi_1(G)$ は全射になる。