微分幾何学 III（大学院）　講義ノート　1991/6/12

10 ルート空間分解

10.1 定理. G をコンパクト連結 *Lie* 群とし G の極大トーラス Tを *1* つとる。$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{t}$ をそれぞれ G と Tの *Lie* 環とする。

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} | \ [H, X] = \sqrt{-1}\alpha(H)X \ (H \in \mathfrak{t})\} \qquad (\alpha \in \mathfrak{t}^*)$$
$$\Delta(G) = \{\alpha \in \mathfrak{t}^* - \{0\} | \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$$

とおくと

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha \in \Delta(G)} \mathfrak{g}_\alpha$$

が成り立ち、右辺の和は直和になる。

証明. G の随伴表現$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ を Tに制限し複素化した表現$\mathrm{Ad} : T \longrightarrow GL(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ を定理 2.10 により既約分解し

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \oplus_{i=1}^n V_i$$

とする。命題 4.2 より各 V_iは 1 次元になる。$T \cong T^k$とし Tと T^kを同一視すると定理 4.6 より各 V_iについて $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}$ が存在し

$$\mathrm{Ad}(t_1, \ldots, t_k)|_{V_i} = t^{m_1} \cdots t^{m_k} \qquad (t = (t_1, \ldots, t_k) \in T)$$

となる。Tの指数写像は

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{t} = \mathbb{R}^k &\longrightarrow T = T^k \\ ; (x_1, \ldots, x_k) &\longmapsto (e^{\sqrt{-1}x_1}, \ldots, e^{\sqrt{-1}x_k}) \end{aligned}$$

だから

$$\alpha_i(x_1, \ldots, x_k) = m_1 x_1 + \cdots + m_k x_k \qquad ((x_1, \ldots, x_k) \in \mathfrak{t})$$

とおくと、$\alpha_i \in \mathfrak{t}^*$で

$$(\mathrm{ad}(H))(X) = \sqrt{-1}\alpha_i(H)X \qquad (X \in V_i)$$

が成り立つ。これより $V_i \subset \mathfrak{g}_{\alpha_i}$となり$\alpha_i \in \Delta(G)$。定理 8.10 より Tの中心化部分群は T自身だから $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$となり、

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha \in \Delta(G)} \mathfrak{g}_\alpha$$

が成り立つ。よって$\Delta(G) = \{\alpha_i | \alpha_i \neq 0\}$。特に$\Delta(G)$ は $\mathfrak{t}^*$の有限部分集合になる。したがって $H_0 \in \mathfrak{t}$ をすべての$\alpha(H_0)$ $(\alpha \in \Delta(G))$ が異なるようにとることができる。すると上の和は$\mathrm{ad}(H_0)$ の固有空間分解になり、直和になる。

10.2 定義. 定理 *10.1* において $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ となる$\alpha \in \mathfrak{t}^*$を $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の $\mathfrak{t}$ に関するルートと呼び、$\mathfrak{g}_\alpha$をαのルート空間と呼ぶ。また、直和分解

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha \in \Delta(G)} \mathfrak{g}_\alpha$$

を $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の $\mathfrak{t}$ に関するルート空間分解と呼ぶ。

10.3 定理. 定理 *10.1* と同じ設定条件のもとで$\alpha, \beta \in \mathfrak{t}^*$に対して

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

G に両側不変 *Riemann* 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ をいれ、それから定まる $\mathfrak{g}$ 上の内積を $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$上の複素双線形形式 $\langle\ ,\ \rangle$ に拡張する。$\alpha + \beta \neq 0$ となる$\alpha, \beta \in \mathfrak{t}^*$に対して

$$\langle \mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta \rangle = 0.$$

$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の $\mathfrak{g}$ に関する複素共役写像を$^-$で表すと$\alpha \in \Delta(G)$ に対して$-\alpha \in \Delta(G)$ で$\overline{\mathfrak{g}_\alpha} = \mathfrak{g}_{-\alpha}$が成り立つ。各$\alpha \in \Delta(G)$ について $H_\alpha \in \mathfrak{t}$ を

$$\langle H, H_\alpha \rangle = \alpha(H) \qquad (H \in \mathfrak{t})$$

を満たすようにとると

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{C} H_\alpha \qquad (\alpha \in \Delta(G))$$

が成り立つ。さらに

$$\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1 \qquad (\alpha \in \Delta(G))$$

となる。

証明. $\alpha, \beta \in \mathfrak{t}^*$に対して $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$をとると、任意の $H \in \mathfrak{t}$ について

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(H)([X_\alpha, X_\beta]) &= [(\mathrm{ad}(H))(X_\alpha), X_\beta] + [X_\alpha, (\mathrm{ad}(H))(X_\beta)] \\
&= \sqrt{-1}\alpha(H)[X_\alpha, X_\beta] + \sqrt{-1}\beta(H)[X_\alpha, X_\beta] \\
&= \sqrt{-1}(\alpha+\beta)(H)[X_\alpha, X_\beta].
\end{aligned}$$

したがって $[X_\alpha, X_\beta] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$となり

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

が成り立つ。

$\alpha + \beta \neq 0$ となる$\alpha, \beta \in \mathfrak{t}^*$をとる。すると $(\alpha+\beta)(H) \neq 0$ となる $H \in \mathfrak{t}$ が存在する。$X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$に対して補題 8.2 より

$$\langle [H, X_\alpha], X_\beta \rangle + \langle X_\alpha, [H, X_\beta] \rangle = 0$$

となり

$$\sqrt{-1}(\alpha+\beta)(H)\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 0.$$

したがって $\langle X_\alpha, X_\beta\rangle = 0$ で

$$\langle \mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta\rangle = 0$$

がわかる。

　各$\alpha \in \Delta(G)$ に対して $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$をとる。

$$(\mathrm{ad}(H))(X_\alpha) = \sqrt{-1}\alpha(H)X_\alpha \qquad (H \in \mathfrak{t})$$

となるので、両辺の共役をとると

$$(\mathrm{ad}(H))(\overline{X}_\alpha) = -\sqrt{-1}\alpha(H)\overline{X}_\alpha \qquad (H \in \mathfrak{t}).$$

したがって$\overline{X}_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$となり、$-\alpha \in \Delta(G)$ で$\overline{\mathfrak{g}}_\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha}$が成り立つ。

　各$\alpha \in \Delta(G)$ について $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ はすでにわかっている。$X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $H \in \mathfrak{t}$ に対して

$$\begin{aligned}\langle [X_\alpha, X_{-\alpha}], H\rangle &= \langle X_\alpha, [X_{-\alpha}, H]\rangle \\ &= \langle X_\alpha, \sqrt{-1}\alpha(H)X_{-\alpha}\rangle \\ &= \langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle\sqrt{-1}\alpha(H) \\ &= \sqrt{-1}\langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle\langle H_\alpha, H\rangle \\ &= \langle \sqrt{-1}\langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle H_\alpha, H\rangle\end{aligned}$$

となるので

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = \sqrt{-1}\langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle H_\alpha$$

が成り立つ。よって

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathbb{C}H_\alpha \qquad (\alpha \in \Delta(G))$$

が成り立つ。$X_\alpha(\neq 0) \in \mathfrak{g}_\alpha$に対して$\alpha + \beta \neq 0$ ならば $\langle X_\alpha, \mathfrak{g}_\beta\rangle = 0$ だから $\langle\ ,\ \rangle$ が非退化であることとルート空間分解よりある $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$が存在し $\langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle \neq 0$ となる。したがって

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{C}H_\alpha$$

となることがわかる。

　上の考察より各$\alpha \in \Delta(G)$ について $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$と $E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$を $\langle E_\alpha, E_{-\alpha}\rangle = 1$ となるようにとることができる。このとき

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \sqrt{-1}\langle E_\alpha, E_{-\alpha}\rangle H_\alpha = \sqrt{-1}H_\alpha$$

となる。$\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ を示すために$\dim \mathfrak{g}_\alpha \geq 2$ と仮定して矛盾を導こう。

$$\mathfrak{g}_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}; X \longmapsto \langle X, E_{-\alpha}\rangle$$

は複素線形写像で$\dim \mathfrak{g}_\alpha \geq 2$ だから $\langle D_\alpha, E_{-\alpha}\rangle = 0$ となる 0 でない $D_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$が存在する。0 以上の整数 n に対して

$$D_n = (\mathrm{ad}(E_\alpha))^n(D_\alpha)$$

として D_nを定めると $D_n \in \mathfrak{g}_{(n+1)\alpha}$となる。$D_n$が

$$(*) \qquad [E_{-\alpha}, D_n] = -\sqrt{-1}\frac{n(n+1)}{2}\alpha(H_\alpha)D_{n-1} \qquad (n \geq 1)$$

を満たすことを n に関する帰納法で証明しよう。まず $n = 1$ の場合は

$$\begin{aligned}
&[E_{-\alpha}, D_1] \\
=&[E_{-\alpha}, [E_\alpha, D_\alpha]] \\
=&[[E_{-\alpha}, E_\alpha], D_\alpha] + [E_\alpha, [E_{-\alpha}, D_\alpha]] \\
=&[-\sqrt{-1}H_\alpha, D_\alpha] + [E_\alpha, -\sqrt{-1}\langle D_\alpha, E_{-\alpha}\rangle H_\alpha] \\
=&-\sqrt{-1}\alpha(H_\alpha)D_\alpha.
\end{aligned}$$

次に $(*)$ が n の場合に成り立つと仮定して $n+1$ の場合にも $(*)$ が成り立つことを示そう。

$$\begin{aligned}
&[E_{-\alpha}, D_{n+1}] \\
=&[E_{-\alpha}, [E_\alpha, D_n]] \\
=&[[E_{-\alpha}, E_\alpha], D_n] + [E_\alpha, [E_{-\alpha}, D_n]] \\
=&[-\sqrt{-1}H_\alpha, D_n] + \left[E_\alpha, -\sqrt{-1}\frac{n(n+1)}{2}\alpha(H_\alpha)D_{n-1}\right] \\
=&-\sqrt{-1}(n+1)\alpha(H_\alpha)D_n - \sqrt{-1}\frac{n(n+1)}{2}\alpha(H_\alpha)D_n \\
=&-\sqrt{-1}\frac{(n+1)(n+2)}{2}\alpha(H_\alpha)D_n.
\end{aligned}$$

したがってすべての $n \geq 1$ について $(*)$ は成立する。$D_0 = D_\alpha$は 0 ではなく$\alpha(H_\alpha) = \langle H_\alpha, H_\alpha\rangle$ も 0 ではないので D_1も 0 ではない。同様にして各自然数 n について D_nは 0 ではない。ところが $D_n \in \mathfrak{g}_{(n+1)\alpha}$だから、これは $\mathfrak{g}$ が有限次元であることに矛盾する。したがって$\dim \mathfrak{g} = 1$ が成り立つ。

10.4 例. ユニタリ群 $U(n)$ の *Lie* 環を $\mathfrak{u}\,(n)$ とすると

$$\mathfrak{u}\,(n) = \{X + \sqrt{-1}Y | X, Y \in \mathfrak{gl}\,(n, \mathbb{R}),\ X: \text{交代},\ Y: \text{対称}\ \}$$

となるので $\mathfrak{u}\,(n)^{\mathbb{C}}$は $\mathfrak{gl}\,(n, \mathbb{C})$ に一致する。例 *8.13* にあるように $U(n)$ の極大トーラス Tを定め Tの *Lie* 環を $\mathfrak{t}$ とおくと、

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{-1}x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}x_n \end{bmatrix} \middle| \ x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

1 から n までの互いにことなる i, jに対して (i, j) 成分のみが 1 で他の成分はすべて 0 であるような n 次正方行列を $E_{i,j}$で表す。すると $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left[\begin{bmatrix} \sqrt{-1}x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}x_n \end{bmatrix}, E_{i,j} \right] = \sqrt{-1}(x_i - x_j)E_{i,j}.$$

そこで

$$e_i : \mathfrak{t} \longrightarrow \mathbb{R}; \begin{bmatrix} \sqrt{-1}x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}x_n \end{bmatrix} \longmapsto x_i$$

とおくと $e_i \in \mathfrak{t}^*$となり、

$$\Delta(U(n)) = \{e_i - e_j | 1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j\}$$

がわかる。さらに上の計算より

$$\mathfrak{u}\,(n)_{e_i - e_j} = \mathbb{C}E_{i,j}$$

となり

$$\mathfrak{u}\,(n)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} + \sum_{i \neq j} \mathbb{C}E_{i,j}$$

が $\mathfrak{u}\,(n)^{\mathbb{C}}$の $\mathfrak{t}$ に関するルート空間分解になる。

10.5 例. 特殊ユニタリ群 $SU(n)$ の *Lie* 環を $\mathfrak{su}\,(n)$ とすると

$$\mathfrak{su}\,(n) = \{X + \sqrt{-1}Y | X, Y \in \mathfrak{gl}\,(n, \mathbb{R}),\ X : \text{交代},\ Y : \text{対称},\ \mathrm{tr}\, Y = 0\}$$

となるので $\mathfrak{su}\,(n)^{\mathbb{C}}$は $\mathfrak{sl}\,(n, \mathbb{C})$ に一致する。

$$ST = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{c} z_j \in U(1)\ (1 \leq j \leq n) \\ z_1 \cdots z_n = 1 \end{array} \right\}$$

とおくと、STは $SU(n)$ の極大トーラスになる。STの *Lie* 環を $\mathfrak{st}$ とおくと、

$$\mathfrak{st} = \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{-1}x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}x_n \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{c} x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R} \\ x_1 + \cdots + x_n = 0 \end{array} \right\}.$$

例 *10.4* と同じ記号を使い $f_i = e_i|_{\mathfrak{st}}$ とおくと

$$\begin{aligned} &\Delta(SU(n)) = \{f_i - f_j | 1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j\} \\ &\mathfrak{su}\,(n)_{f_i - f_j} = \mathbb{C}E_{i,j} \end{aligned}$$

がわかる。さらに

$$\mathfrak{su}\,(n)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{st}^{\ \mathbb{C}} + \sum_{i \neq j} \mathbb{C}E_{i,j}$$

が $\mathfrak{su}\,(n)^{\mathbb{C}}$の $\mathfrak{st}$ に関するルート空間分解になる。